СПРАВОЧНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

Е. А. ГРЕБЕНИКОВ

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

~~ББК 22.19~~
Г79
~~УДК 519.6~~

Гребеников Е. А. **Метод усреднения в прикладных задачах.**— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 256 с.

В книге излагается совокупность математических методов, позволяющих исследовать сложные нелинейные колебательные системы, которая получила в литературе название «метод усреднения».

Автор описывает конструктивную часть этого метода, т. е. конкретную реализацию и соответствующие алгоритмы, на математических моделях, достаточно общих, но построенных на основе конкретных задач. Стиль изложения таков, что читатель, заинтересованный в овладении техникой и алгоритмами асимптотической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, сможет после изучения данной книги самостоятельно решать аналогичные задачи.

Для специалистов в области прикладной математики и механики.

Ил. 16. Библиогр. 187 назв.

Рецензент академик *Ю. А. Митропольский*

Г $\frac{1702070000-065}{053(02)-86}$ 50-86

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория колебаний имеет много аспектов. Когда колебательные процессы изучаются математиком, на первый план выдвигаются вопросы существования и построения периодических или почти периодических решений различных классов уравнений (обыкновенных дифференциальных, в частных производных, интегральных и др.). Специалиста-механика интересует прежде всего устойчивость периодических или почти периодических колебаний различного рода механизмов и агрегатов, а физик может интересоваться колебаниями различных объектов, начиная с элементарных частиц и кончая звездами, галактиками и другими крупномасштабными природными образованиями. И в микромире, и в макромире развитие многих физических процессов происходит колебательным, а часто и периодическим образом. Поэтому построение математических моделей для разнообразных колебательных процессов и их всестороннее исследование представляют собой важную задачу прикладной математики. Теория колебаний практически зародилась вместе с дифференциальным и интегральным исчислением, но основателями современной теории нелинейных колебаний с полным правом следует считать крупнейших математиков второй половины 19-го и начала 20-го столетий А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре, разработавших в своих фундаментальных сочинениях достаточно эффективные математические идеи и методы исследований нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений весьма общего вида, могущих иметь отношение и к теории колебаний.

После А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре и особенно в последние 30—40 лет отечественными математиками (Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым, А. А. Андроновым, Л. С. Понтрягиным, А. Н. Тихоновым и их многочисленными учениками) были разработаны новые методы, основанные на идеях вышеупомянутых классиков и позволившие существенно продвинуть вперед решение многих важных задач теории нелинейных колебаний, небесной механики, теоретической физики. При этом соблюдалось определенное гармоническое равновесие между теоретическим и прикладным аспектами, что характерно для творческого стиля и А. М. Ляпунова, и А. Пуанкаре.

Математическим образом задачи теории колебаний является нелинейная математическая модель, описываемая нелинейными уравнениями. Исследование таких моделей проводится, как правило, с помощью метода последовательных приближений (метода итераций), а в том случае, когда нет надобности в получении очень точных результатов, можно ограничиться рассмотрением линеаризованной модели. К методу итераций мы здесь относим разнообразные варианты асимптотической теории возмущений, использующие разложения по степеням малых и больших параметров, метод рядов, метод последовательных преобразований и их любые возможные сочетания. Эффективность всех указанных методов зависит от многих факторов, среди которых основными, на наш взгляд, представляются следующие:

1) Выбор наиболее оптимального для данной задачи фазового пространства, его метрики и нормы; ведь метод преобразований зависимых и независимых переменных (замена переменных) в процессе решения задачи и означает на самом деле поиск исследователем той геометрии, в которой решаемая задача описывается наиболее просто.

2) Выбор начального (нулевого) приближения, к которому находят в процессе решения добавки.

При удачном выборе начального приближения добавки будут малыми, при неудачном — большими, и в последнем случае приближенное решение может не иметь ничего общего с точным решением задачи.

Асимптотическая теория возмущений, опирающаяся, с одной стороны, на начальное приближение, построенное с помощью какого-либо оператора сглаживания (усреднения), и, с другой стороны, на последовательные замены переменных для получения тех функций, которые мы назвали выше добавками, получила в математической литературе название «метод усреднения», а во многих литературных источниках — «метод Крылова — Боголюбова».

Применительно к колебательным процессам это означает, что с помощью процедуры сглаживания из всех периодических компонент (гармоник), составляющих данный колебательный процесс, выделяются основные компоненты, характеризующие наиболее значительные свойства изучаемого физического явления, а далее используются замены переменных, которые преобразовывают первоначальные уравнения в «сглаженные». При обосновании применимости асимптотической теории возмущений естественно возникает вопрос об оценке величин отклонений точных решений от сглаженных (усредненных) решений. Основополагающие результаты этого важного математического направления принадлежат Н. Н. Боголюбову, впервые объединившему идею сглаживания правых частей уравнений с идеей последовательного осуществления замен переменных.

Таким образом, замену переменных можно рассматривать как средство поиска наиболее оптимальной геометрии для данной нелинейной задачи. Но есть и другой, не менее важный, а для приложений, быть может, более существенный аспект. Формулы, реализующие сами замены переменных, представляют собой асимптотические выражения для точных решений первоначальных уравнений, т. е. их можно трактовать как формулы для приближенных решений первоначальных уравнений. Иными словами, метод усреднения и его разнообразные варианты могут дать эффективное конструктивное средство для построения решений первоначальных, несглаженных уравнений в виде асимптотических в смысле Пуанкаре представлений (см. § 0.2). Из дальнейшего будет видно, что метод усреднения дает возможность построить такую теорию возмущений, которая не обязательно представляется классическими степенными рядами по степеням малых или больших параметров (как, например, в методах Ляпунова и Пуанкаре). Эта аналитическая зависимость от параметра может быть существенно более сложной.

К настоящему времени издано немало книг монографического и учебного характера, посвященных различным вопросам теории нелинейных колебаний. Среди них особое место занимает монография Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний», выдержавшая уже несколько изданий. Эта монография оказала и оказывает большое идейное и методическое влияние практически на всех специалистов, изучающих колебательные явления и периодические процессы, в том числе и на автора представленной книги, на его научное мировоззрение. Несмотря на относительное обилие печатных изданий по теории нелинейных колебаний, потребность в книгах, в которых изложены конкретные методы и алгоритмы, позволяющие получить не столько качественные, сколько количественные результаты, постоянно растет. Мало также книг, в которых изложены результаты, относящиеся к асимптотической теории так называемых резонансных систем. Но особенно чувствуется потребность в книгах, с помощью которых начинающие прикладники и инженеры могли бы достаточно быстро освоить конструктивную часть теории нелинейных колебаний, т. е. методику расчетов периодических и почти периодических решений нелинейных моделей. Основное содержание данной книги составляют как раз конкретные методы и алгоритмы, позволяющие находить решения задач теории нелинейных колебаний. Для демонстрации их эффективности выбраны как хорошо известные задачи (уравнения Ван-дер-Поля, Дюффинга и др.), так и новые задачи, описываемые многомерными системами дифференциальных уравнений с переменными частотами и с резонансами (задачи небесной механики, механики деформируемого тела и др.). Для читателя, интересующегося проблемами математического обоснования применяемых методов и алгоритмов, приведены формулировки основных теорем и необходимая библиографическая литература.

В заключение хотелось бы выразить искреннюю благодарность академику Ю. А. Митропольскому, моим коллегам Ю. А. Рябову и Н. Х. Розову, сделавшим ряд ценных предложений и замечаний по структуре и содержанию книги, и особенно А. Г. Сокольскому, Б. И. Мосеенкову, С. В. Миронову и В. А. Приходько, подготовившим подробный материал для некоторых ее параграфов.

Е. А. Гребеников

ВВЕДЕНИЕ

§ 0.1. Основные обозначения

Приведем сначала наиболее часто встречающиеся в книге обозначения и некоторые к ним пояснения.

1. Обозначим евклидово вещественное пространство размерности n символом $\mathbf{R}_n$, а унитарное комплексное пространство — символом $\mathbf{K}_n$. В качестве норм в векторных пространствах $\mathbf{R}_n$ и $\mathbf{K}_n$ можно взять одну из следующих величин [1, 2]:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad \|x\| = \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|, \quad \|x\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Утверждения, касающиеся норм и приведенные ниже в ходе изложения материала, справедливы для всех трех норм.

2. $G_n \subset \mathbf{R}_n$ и $Q_m \subset \mathbf{R}_m$ представляют n-мерную и m-мерную области евклидовых пространств $\mathbf{R}_n$ и $\mathbf{R}_m$ соответственно. Индекс указывает на размерность области или пространства.

3. Прямое (декартово) произведение двух областей будем обозначать

$$G_{m+n} = G_m \times G_n \quad \text{или} \quad G_{m+n} = \{(x, y) : x \in G_m, \ y \in G_n\}.$$

4. $\mathbf{R}_1 = (-\infty, \infty)$. Время всегда принадлежит $\mathbf{R}_1$ ($t \in \mathbf{R}_1$, или $t \in [a, T] \subset \mathbf{R}_1$).

5. Всюду μ означает малый неотрицательный параметр, кроме гл. V, где μ означает векторный целочисленный индекс.

6. Символ $\rightarrow$ означает одностороннее преобразование (замену), а символ $\leftrightarrow$ соответствует двустороннему (прямому и обратному) преобразованию. Например, $z \rightarrow \bar{z}$, $z \leftrightarrow \bar{z}$, (67) $\rightarrow$ (70) и др.

7. Скалярное произведение двух n-мерных вектор-строк $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y_t = (y_1, \ldots, y_n)$ всюду обозначается общепринятым символом (x, y), и, следовательно,

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Аналогично определяется скалярное произведение двух n-мерных вектор-столбцов и скалярное произведение целочисленной

n-мерной вектор-строки $k=(k_1, \ldots, k_n)$ на n-мерную вектор-строку $z=(z_1, \ldots, z_n)$.

8. Норма целочисленного n-мерного вектора $k=(k_1, \ldots, k_n)$ определяется по формуле

$$\|k\| = |k_1| + \ldots + |k_n|, \quad k_s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad s = 1, \ldots, n.$$

Норма мнимой части n-мерного комплексного вектора $z \in G_n \subset \mathbf{K}_n$ определяется формулой

$$\|\operatorname{Im} z\| = |\operatorname{Im} z_1| + \ldots + |\operatorname{Im} z_n|.$$

9. Если n-мерная вектор-функция $u=(u_1, \ldots, u_n)$ зависит от n-мерного вектор-аргумента $z=(z_1, \ldots, z_n)$, то $\partial u/\partial z$ представляет собой матрицу Якоби порядка $n \times n$ [3, 4]

$$\partial u/\partial z = (\partial u_i/\partial z_k), \quad i, k = 1, \ldots, n.$$

10. Произведение матрицы $\partial u/\partial z$ на n-мерный вектор Z будем обозначать символом $(\partial u/\partial z, Z)$.

В гл. V символом (x_k, x_s) обозначены скобки Пуассона. Таким образом, символы (,) используются для обозначения трех операций: скалярного произведения двух векторов, произведения матрицы на вектор и скобок Пуассона.

11. Ряд Фурье 2π-периодической функции $Z(z)$ n-мерного аргумента z всюду будем записывать в комплексной форме [5, 6]:

$$Z(z) = \sum_{\|k\| \geq 0} Z_k \exp\{i(k, z)\},$$

$$Z_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} Z(z) \exp\{-i(k, z)\} \, dz_1 \ldots dz_n.$$

Будем считать, что это разложение имеет место в области $z \in G_n \subset \mathbf{K}_n$ такой, что $\|\operatorname{Im} z\| \leq \rho$, ρ — вещественное число.

12. Операторы усреднения (сглаживания) обозначены символом M. Индекс указывает на те переменные, по которым выполняется процедура усреднения; например, M_t означает «оператор усреднения по времени t».

13. Черточка над буквенными символами всюду означает усредненное значение функции, переменной, или решение усредненных (сглаженных) уравнений. Например, если через $z(t, \mu)$ обозначено решение какого-либо уравнения, то через $\bar{z}(t, \mu)$ будем всюду обозначать решение соответствующего усредненного уравнения. $\bar{Z}$ есть некоторое «среднее» значение функции Z.

14. Всюду, за исключением §§ 4.1—4.5, n-мерный вектор $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ означает вектор основных частот дифференциальных уравнений. Основные частоты могут быть как постоянными, так и фукциями соответствующих аргументов. В за-

дачах небесной механики традиционно через ω обозначается «угловое расстояние перицентра от узла» [7, 8].

15. Аналитическую и 2π-периодическую в области $\|\operatorname{Im} z\| \leqslant \rho$ функцию $Z(z)$ часто удобно представлять в виде

$$Z(z) = Z_N(z) + R_N Z(z),$$

где

$$Z_N(z) = \sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N} Z_k \exp\{i(k, z)\},$$

$$R_N Z(z) = \sum_{\|k\| \geqslant N+1} Z_k \exp\{i(k, z)\}.$$

16. В задачах динамики используются, как правило, следующие пространства: а) трехмерное евклидово пространство $\mathbf{R}_3$ с метрикой, определенной в [1], и нормой из п. 1; б) одномерное евклидово пространство $\mathbf{R}_1$, изображающее либо одну из координат, либо время t. Пространство $\mathbf{R}_3$ называется *координатным евклидовым пространством*, а однопараметрический геометрический образ движения в $\mathbf{R}_3$ можно назвать *траекторией*. Наряду с этими пространствами в механике и физике используется четырехмерное пространство $\mathbf{R}_4 = \mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1$ [9] (трехмерное евклидово пространство $\mathbf{R}_3$ и одномерное временно́е пространство $\mathbf{R}_1$), которое может быть названо *четырехмерным координатным пространством* (так называемые *четырехмерные системы отсчета, галилеев пространственно-временной континуум, лоренцев пространственно-временной континуум* и др. [9—11]).

График движения в четырехмерном пространстве называется *мировой линией*. В пространстве $\mathbf{R}_3$ движение механической системы P_k $(k = 1, \ldots, n)$ изображается n траекториями, а в четырехмерном пространстве — n мировыми линиями.

Конфигурационное пространство для механической системы точек P_k $(k = 1, \ldots, n)$ — это пространство, измерениями которого являются x_k, y_k, z_k $(k = 1, \ldots, n)$ и, таким образом, размерность его равна $3n$. В механической терминологии конфигурационное пространство — это пространство обобщенных лагранжевых координат [4]. Строгое математическое определение конфигурационного пространства можно найти в [9]. Фазовое пространство — это пространство координат и скоростей (или импульсов). Для механической системы n материальных точек с декартовыми координатами x_k, y_k, z_k $(k = 1, \ldots, n)$ размерность фазового пространства равна $6n$. Если математическая модель описывается системой дифференциальных уравнений 1-го порядка (каноническими системами, стандартными в смысле Боголюбова системами, многочастотными системами с медленными и быстрыми движениями и др.), то мы решаем задачу в фазовом пространстве. Если изучаются основные уравнения динамики (уравнения Лагранжа 2-го рода, которые являются дифференциальными уравнениями 2-го порядка для обобщенных лагранжевых координат), можно считать, что мы «погружаем» задачу или в евклидово трехмерное пространство, или в четырехмерное пространство, или, наконец, в конфигурационное пространство.

§ 0.2. Асимптотические представления и ряды. Их свойства

Наиболее распространенным конструктивным средством аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений можно считать асимптотические представления и асимптотические ряды, поэтому представляется целесообразным привести здесь их основные свойства [12—14].

Рассмотрим бесконечный степенной ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(t, \mu), \tag{0.1}$$

каждый член которого определен в $G_2 = \{(t, \mu): t \in [0, T], 0 \leqslant \leqslant \mu \leqslant \mu^*\}$.

Обозначим его частичную сумму через

$$\varphi_p(t, \mu) = \sum_{k=0}^{p} \mu^k z_k(t, \mu). \tag{0.2}$$

Если в G_2 существует функция $\varphi(t, \mu)$ такая, что для любого $p > 0$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{\varphi(t, \mu) - \varphi_p(t, \mu)}{\mu^p} = 0, \tag{0.3}$$

то будем говорить, что ряд (1)*) является *асимптотическим представлением функции* $\varphi(t, \mu)$ в G_2. Пуанкаре [12] предложил для этого определения пользоваться символом тождественного равенства

$$\varphi(t, \mu) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(t, \mu) \tag{0.4}$$

и назвал такие соотношения *асимптотическими равенствами*. Ряд вида (1) может быть назван также асимптотическим рядом в G_2.

Всякий сходящийся степенной ряд, естественно, является и асимптотическим рядом. Обратное утверждение, очевидно, неверно. Для асимптотического ряда характерно то, что, несмотря на возможную его расходимость, сумма первых его $p+1$ членов

---

*) Согласно выбранной форме нумерации формул, в каждой главе книги имеется своя сквозная нумерация. Поэтому в пределах главы ссылка на формулу из этой же главы не содержит номера главы.

достаточно хорошо аппроксимирует функцию $\varphi(t, \mu)$ при малых значениях μ. Из приведенного определения вытекают равенства

$$\varphi(t, \mu) = \sum_{k=0}^{p} \mu^k z_k(t, \mu) + o(\mu^p), \tag{0.5}$$

$$\varphi(t, \mu) = \sum_{k=0}^{p} \mu^k z_k(t, \mu) + O(\mu^{p+1}). \tag{0.6}$$

Два асимптотических равенства можно складывать и умножать, т. е. если

$$\varphi_1(t, \mu) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k z_k^{(1)}(t, \mu), \tag{0.7}$$

$$\varphi_2(t, \mu) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k^{(2)}(t, \mu), \tag{0.8}$$

то

$$\varphi(t, \mu) = \varphi_1(t, \mu) + \varphi_2(t, \mu) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(t, \mu), \tag{0.9}$$

$$\Phi(t, \mu) = \varphi_1(t, \mu)\, \varphi_2(t, \mu) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k Z_k(t, \mu), \tag{0.10}$$

причем

$$z_k(t, \mu) = z_k^{(1)}(t, \mu) + z_k^{(2)}(t, \mu), \tag{0.11}$$

$$Z_k(t, \mu) = \sum_{s=0}^{k} z_s^{(1)}(t, \mu)\, z_{k-s}^{(2)}(t, \mu). \tag{0.12}$$

Асимптотические равенства (4) можно почленно интегрировать (если каждое слагаемое асимптотического ряда (1) является интегрируемой функцией); имеет место асимптотическое равенство

$$\int \varphi(t, \mu)\, dt \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \int z_k(t, \mu)\, dt. \tag{0.13}$$

Почленно дифференцировать асимптотическое равенство (4), даже если каждый член ряда (1) является дифференцируемой функцией, вообще говоря, нельзя. Иными словами, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \frac{dz_k(t, \mu)}{dt}$$

и функция $d\varphi(t, \mu)/dt$ могут быть такими, что асимптотическое равенство

$$\frac{d\varphi(t, \mu)}{dt} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \frac{dz_k(t, \mu)}{dt} \tag{0.14}$$

не имеет места. Вместе с тем, как показал Пуанкаре, асимптотическими равенствами вида (14) можно пользоваться при построении решений дифференциальных уравнений.

Пусть дифференцируемая по t функция $z=\varphi(t, \mu)$ является одним из решений дифференциального уравнения

$$dz/dt = Z(z, \ t, \ \mu), \tag{0.15}$$

а ряд

$$S(t, \mu) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k s_k(t, \mu) \tag{0.16}$$

удовлетворяет ему формально (безотносительно к тому, сходится он или расходится). Напишем теперь асимптотическое равенство

$$\frac{dS(t, \mu)}{dt} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \frac{ds_k(t, \mu)}{dt}. \tag{0.17}$$

Тогда можно утверждать по [12], что

$$\frac{d\varphi(t, \mu)}{dt} \equiv \frac{dS(t, \mu)}{dt}. \tag{0.18}$$

Весьма важным свойством асимптотических представлений является асимптотическое равенство для сложной функции. Оно формулируется следующим образом.

Пусть функция $F(z)$ аналитична [15] в некоторой окрестности точки $z=0$. Предположим, что имеется асимптотическое равенство

$$\varphi(t, \mu) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \varphi_k(t, \mu). \tag{0.19}$$

Если подставим ряд (19) вместо z в функцию $F(z)$ и выполним все разложения по степеням μ, то получим выражение $F\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu^k \varphi_k\right)$.

Тогда имеет место асимптотическое равенство

$$F(\varphi(t, \mu)) \equiv F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \varphi_k(t, \mu)\right). \tag{0.20}$$

Приведенные выше определение, свойства и соотношения легко переносятся на случай функций многих переменных, когда z является n-мерным аргументом: $z=(z_1, \ldots, z_n)$. Свойства (9), (10), (20) очевидны. Что касается асимптотических равенств (13), (18), то они в этом случае также могут быть написаны. Разница лишь в том, что интеграл в (13) можно понимать как однократный, двойной и, вообще, n-кратный, если при этом каждый член ряда (1) интегрируем по одной, двум и, вообще, n

переменным в соответствующих областях, а производную d/dz в (18) следует понимать как частную производную $\partial/\partial z_s$.

Известно лишь небольшое число нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых можно построить в виде сходящихся степенных рядов. Можно назвать в первую очередь ряды, построенные Ляпуновым [16] при решении уравнений Хилла. Пуанкаре показал, что в большинстве задач динамики ряды, формально удовлетворяющие уравнениям динамики и зависящие от времени t и малого параметра μ, являются расходящимися в классическом определении, но тем не менее, будучи асимптотическими, позволяют выписать в явной форме приближенные решения этих уравнений.

§ 0.3. Основной объект исследования

В качестве математических моделей для колебательных явлений, как правило, можно рассматривать нелинейные дифференциальные уравнения (обыкновенные или в частных производных), правые части которых зависят периодическим образом от всех или некоторых искомых функций и времени.

Основная математическая модель, исследуемая в данной книге, имеет вид

$$dz/dt = Z(z, t, \mu), \qquad (0.21)$$

где $z = (z_1, \ldots, z_s)$, $Z = (Z_1, \ldots, Z_s)$ — некоторые s-мерные векторы евклидова пространства $\mathbf{R}_s$, $t \in \mathbf{R}_1$ — вещественное время, μ — малый неотрицательный параметр.

Система (21) предполагается удовлетворяющей основным теоремам теории дифференциальных уравнений (теореме существования и единственности решения и др.).

Рассматриваем следующие случаи:

1) правая часть имеет интегральное среднее по $t \in [0, \infty)$;

2) если вектор-функция Z не зависит явным образом от t, то она должна быть 2π-периодической или по всем компонентам вектора z, или по части из них;

3) возможно объединение свойств 1) и 2).

К дифференциальным уравнениям вида (21) со свойствами 1)—3) относятся следующие классы дифференциальных уравнений: стандартные в смысле Н. Н. Боголюбова системы, системы с медленными и быстрыми переменными (в частности, вращательные системы), сильно возмущенные системы. Особое место среди них занимают так называемые резонансные системы.

Для создания конструктивной теории решения уравнений существенной является зависимость Z от малого параметра μ. Функция $Z(z, t, \mu)$ может быть регулярной по μ в окрестности точки $\mu = 0$ или сингулярной в этой точке. В зависимости от этого разработаны и два варианта теории возмущений со своим специфическим аппаратом, со своими математическими конструкциями и теорией.

Почти всюду мы будем исследовать решения системы (21) с регулярными по μ (чаще всего аналитическими) правыми частями, и лишь в одном параграфе (§ 3.9) рассматривается сингулярный случай.

Характер зависимости $Z(z, t, \mu)$ от μ определяет форму и аппарат теории возмущений, применяемые для построения приближенных решений системы (21). В регулярном случае решения системы (21) ищутся в виде асимптотических рядов (16), и здесь в принципе находит применение все ценное, что создано выдающимися математиками в аналитической теории дифференциальных уравнений.

§ 0.4. Краткое содержание книги

Глава I посвящена различным аспектам асимптотической теории дифференциальных уравнений с малым параметром, основанной на идее усреднения (сглаживания) правых частей. Приведено обобщенное уравнение и дана интерпретация метода усреднения, а также описаны наиболее распространенные в динамике операторы сглаживания, позволяющие строить различные варианты теории возмущений по степеням малого параметра μ. Дальше в этой главе рассмотрены различные классы нелинейных систем без частотных резонансов и изложена конструктивная методика построения их асимптотических решений с помощью преобразования Крылова — Боголюбова.

Конечной целью содержания гл. II является построение в явном виде преобразования Крылова — Боголюбова, которое дает приближенное (асимптотическое) решение конкретных задач теории нелинейных колебаний. Выполнение читателем необходимых при этом аналитических операций служит, на наш взгляд, гарантией уверенного овладения тем богатым математическим аппаратом, который имеется сейчас в теории нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром.

В гл. III изложена асимптотическая теория применительно к резонансным системам дифференциальных уравнений.

Основная трудность, которая возникает при построении асимптотической теории возмущений для резонансных систем, состоит в том, что возмущения любого порядка (возмущение k-го порядка пропорционально μ^k) из-за возможного появления в аналитических формулах «малых знаменателей» могут достигнуть, вообще говоря, сколь угодно большой величины при сколь угодно малом значении μ (можно считать, что «резонансная система» и «малые знаменатели» являются синонимами). Несмотря на эти трудности, удается построить эффективные алгоритмы для теории возмущений нелинейных систем с частотными резонансами, основанные на синтезе оптимальных процедур усреднени и преобразования Крылова — Боголюбова.

В последнем параграфе гл. III кратко изложены некоторые результаты из теории сингулярно возмущенных уравнений. Эти результаты берут начало в идеях Л. С. Понтрягина, и им свойственна весьма высокая степень законченности. Этим, в сущности, и обусловлен наш выбор.

Глава IV соотносится с гл. III примерно так же, как гл. II — с гл. I. Ее содержание включает те задачи, которые по существу и вызвали появление пока еще незавершенной математической теории резонансных систем. Хотя эти задачи и взяты из различных областей естествознания, они описываются схожими нелинейными математическими моделями, в которых возможны резонансы между основными частотами. Последние два параграфа содержат алгоритмы построения приближенных решений нелинейных уравнений, специально разработанные для ЭВМ.

Глава V занимает особое положение. Есть много удачных изданий, посвященных теории канонических систем. Тем не менее чувствуется и определенный дефицит в изданиях из серии «Справочная математическая библиотека» и «Библиотека программиста», содержащих изложение явных процедур и алгоритмов теории канонических преобразований. В последние годы появились новые конструктивные идеи, использующие большие возможности программирования и ЭВМ в теории гамильтоновых систем. Это в первую очередь касается наиболее сложной проблемы — проблемы устойчивости равновесных решений гамильтоновых систем, нормализации гамильтонианов и построения канонических преобразований. Новые процедуры и алгоритмы гамильтоновой теории составляют содержание последней главы книги.

ГЛАВА I

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В НЕРЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМАХ

§ 1.1. Обобщенное уравнение метода усреднения

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dz/dt = Z(z, t, \mu), \quad z(t_0) = z_0, \tag{1.1}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ есть n-мерные векторы, $z \in G_n$, G_n — некоторая n-мерная область евклидова пространства $\mathbf{R}_n$, $t \in \mathbf{R}_1 = (-\infty, \infty)$, μ — малый неотрицательный параметр.

Наряду с системой (1) зададим другую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\bar{z}/dt = \bar{Z}(\bar{z}, t, \mu), \quad \bar{z}(t_0) = \bar{z}_0, \tag{1.2}$$

которую будем называть *системой сравнения* для системы (1). Вектор-функцию $\bar{Z}(\bar{z}, t, \mu)$ назовем *функцией сравнения* для $Z(z, t, \mu)$ (см. [17]).

Обычно уравнения сравнения строятся с помощью какого-либо оператора сглаживания (оператора усреднения).

Общая задача, которую предстоит решить, состоит в том, чтобы найти такую невырожденную дифференцируемую замену переменных $z \to \bar{z}$, которая преобразует систему (1) в систему сравнения (2). Расскажем коротко идею решения.

Пусть искомая замена переменных представляется в виде

$$z = u(\bar{z}, t, \mu). \tag{1.3}$$

Тогда справедливо дифференциальное тождество

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \frac{d\bar{z}}{dt}\right) + \frac{\partial u}{\partial t},$$

и, пользуясь первоначальной системой (1) и системой сравнения (2), получаем то уравнение, которому должна удовлетворять неизвестная вектор-функция $u(\bar{z}, t, \mu)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \bar{Z}(\bar{z}, t, \mu)\right) + \frac{\partial u}{\partial t} = Z(u(\bar{z}, t, \mu), t, \mu). \tag{1.4}$$

Первое слагаемое в (4) представляет собой произведение матрицы Якоби $\partial u/\partial \bar{z}$ порядка $n \times n$ на вектор-столбец $\bar{Z}$. Уравнение (4) назовем *обобщенным уравнением метода усреднения* или *обобщенным уравнением Крылова — Боголюбова* [17].

В координатной форме уравнение (4) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial \bar{z}_i} \bar{Z}_i(\bar{z}_1, \ldots, z_n, t, \mu) + \frac{\partial u_k}{\partial t} = Z_k(u_1, \ldots, u_n, t, \mu), \qquad (1.5)$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

К уравнениям (4) или (5) следует добавить начальные условия

$$u(\bar{z}_0, t_0, \mu) = z_0. \qquad (1.6)$$

Таким образом, замена переменных (3) определяется системой n квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка с искомыми функциями $u_1, \ldots, u_n$ и с начальными условиями (6).

Если преобразование (3) существует и не вырождено в некоторой области изменения переменных $\bar{z}$, t, μ, то в этой области уравнения (1) и (2) являются эквивалентными (равносильными).

Отыскание точных решений систем (2) и (4) является, как правило, задачей такой же трудности, как и решение первоначальных уравнений, однако при построении приближенных решений уравнений (1) и в особенности уравнений (2) замена переменных (3) и уравнение (4) могут оказаться, как будет показано ниже, весьма полезными.

§ 1.2. Сущность метода усреднения

При построении уравнений сравнения (2) мы всегда должны иметь в виду по крайней мере два обстоятельства:

1) Уравнения сравнения должны быть более «решабельными», нежели первоначальные уравнения, иначе процедура замены одних уравнений другими теряет смысл.

2) Следует иметь в распоряжении методы, оценивающие отклонения решений уравнений сравнения от первоначальных решений. Желательно, чтобы эти отклонения были достаточно малыми, а это обстоятельство оказывается непосредственно связанным с изучением свойств вектор-функции преобразования $u(\bar{z}, t, \mu)$, т. е. свойств решения уравнения Крылова — Боголюбова (4).

Чтобы пояснить эти обстоятельства, рассмотрим два предельных в некотором смысле варианта.

Первый вариант — тождественное преобразование. Пусть уравнения сравнения (2) в точности совпадают с первоначальными уравнениями, т. е. $Z \equiv \bar{Z}$, $\bar{z}_0 = z_0$. Тогда уравнение (4) принимает вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \bar z}, Z(\bar z, t, \mu)\right) + \frac{\partial u}{\partial t} = Z(u(\bar z, t, \mu), t, \mu),$$
$$u(z_0, t_0, \mu) = z_0, \tag{1.7}$$

и оно, как легко проверить, допускает решение $u(\bar z, t, \mu) \equiv \bar z$, т. е. старые и новые переменные совпадают, $z \equiv \bar z$. Таким образом, в случае равенства функций Z и $\bar Z$ мы легко находим одно из частных решений уравнения Крылова — Боголюбова, но от этого решения мало пользы, так как не получено никакой новой информации о свойствах решений исходных уравнений.

Второй вариант — это преобразование, приводящее к простейшим уравнениям сравнения. Самым простым уравнением сравнения можно считать уравнение

$$d\bar z/dt = a, \qquad \bar z(t_0) = z_0 \tag{1.8}$$

(a — постоянный вектор), имеющее очевидное решение

$$\bar z(t) = a(t - t_0) + z_0.$$

Изучим теперь уравнение Крылова — Боголюбова для этого случая. Оно запишется в виде

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \bar z}, a\right) + \frac{\partial u}{\partial t} = Z(u(\bar z, t, \mu), t, \mu). \tag{1.9}$$

Система в характеристиках [18, 19] для (9) имеет вид

$$d\bar z/dt = a, \qquad du/dt = Z(u, t, \mu). \tag{1.10}$$

Отсюда следует, что определение замены переменных, преобразующей первоначальное уравнение (1) в простейшее уравнение (8), предполагает знание решения первоначальной системы. Следовательно, нахождение решения уравнения Крылова — Боголюбова в этом случае эквивалентно нахождению решения исходной системы (1), поэтому решение задачи о преобразовании уравнений не стало более легким.

Рассмотренные здесь предельные варианты позволяют сделать следующие выводы.

С одной стороны, уравнение Крылова — Боголюбова (7) при тождественном преобразовании правых частей имеет очевидное решение, но зато уравнения сравнения совпадают с первоначальными, и, следовательно, проблема интегрируемости уравнений сравнения равносильна проблеме интегрируемости первоначальных уравнений. С другой стороны, если в качестве уравнений сравнения выбираются простейшие, то решение уравнений, определяющих замену переменных, эквивалентно интегрированию первоначальных уравнений.

Эти соображения наталкивают на мысль о нахождении промежуточного, компромиссного варианта, сущность которого должна состоять в следующем.

1) Функцию сравнения $\bar{Z}$ следует выбрать таким образом, чтобы она имела более простую аналитическую структуру по сравнению с первоначальной функцией Z, но вместе с тем ей должны быть присущи основные свойства последней. Только при таком выборе можно ожидать некоего сходства в поведении решений уравнения сравнения и решений первоначального уравнения.

2) Выбор функции сравнения $\bar{Z}$ должен осуществляться таким образом, чтобы квазилинейные уравнения в частных производных для замены переменных (уравнения Крылова — Боголюбова) допускали если не нахождение точного решения, то хотя бы проведение какого-либо качественного анализа.

В первую очередь нас будут интересовать такие свойства функции $u(\bar{z}, t, \mu)$, как ограниченность и степень гладкости в некоторой области изменения аргументов.

Забегая вперед, представим себе, что нам удалось, с одной стороны, построить приближенное решение $\bar{z}(t)$ уравнения сравнения (2), а с другой — оценить норму $\|z(t)-\bar{z}(t)\|$ на некотором промежутке времени $[t_0, T]$. Тогда, очевидно, можно сделать и некоторые выводы о поведении решения $z(t)$ первоначальной системы (1) на этом промежутке времени.

Такой компромиссный вариант, как мы увидим дальше, часто в конкретных задачах может быть реализован и дает неплохие для приложений результаты. Можно сказать, что этот подход и выражает собой сущность прикладного аспекта преобразования Крылова — Боголюбова для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1).

§ 1.3. Наиболее распространенные операторы усреднения

Для каждого первоначального дифференциального уравнения (1) можно построить бесконечное количество уравнений сравнения вида (2), поэтому естественно возникает вопрос о построении таких уравнений сравнения, которые оптимальным образом учитывали бы те свойства решений, которые описаны в § 1.2. Традиционно при построении уравнений сравнения чаще всего использовались операторы усреднения (сглаживания) по явно входящему в правую часть уравнения (1) времени t или по тем переменным z, от которых функция $Z(z, t, \mu)$ зависит периодическим образом.

Введем для операторов усреднения следующие обозначения:

$$M_t\,[Z(z, t, \mu)] = \bar{Z}(z, t_0, \mu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} Z(z, t, \mu)\, dt, \qquad (1.11)$$

$$M_z\,[Z(z, \mu)] = \bar{Z}(\mu) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} Z(z, \mu)\, dz_1, \ldots, dz_n, \qquad (1.12)$$

если функция $Z(z, \mu)$ является 2π-периодической по всем компонентам n-мерного вектора z в области определения $z \in G_n$, т. е.

$$Z(z+(2\pi), \mu) \equiv Z(z, \mu), \qquad (1.13)$$

где символом $z+(2\pi)$ обозначен вектор $(z_1+2\pi, \ldots, z_n+2\pi)$. Аналогично

$$M_{z^{(s)}}[Z(z, \mu)] = \overline{Z}(z_{s+1}, \ldots, z_n, \mu) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} Z(z_1, \ldots, z_n, \mu)\, dz_1 \ldots dz_s, \qquad (1.14)$$

если

$$Z(z_1+2\pi, \ldots, z_s+2\pi, z_{s+1}, \ldots, z_n, \mu) \equiv Z(z, \mu), \quad 0 \leqslant s \leqslant n. \quad (1.15)$$

Иными словами, процедура сглаживания функции $Z(z, \mu)$ по формуле (14) означает ее усреднение по части переменных $z_1, \ldots, z_s$, от которых функция $Z(z, \mu)$ зависит периодическим образом, хотя не исключено, что по переменным $z_{s+1}, \ldots, z_n$ она тоже может быть периодической функцией.

В теории нелинейных колебаний, в небесной механике очень важным является тот случай, когда функция $Z(z, \mu)$ является 2π-периодической и удовлетворяет условиям одной из теорем о разложимости функции в n-кратный ряд Фурье (см. конец параграфа). Тогда она в области G_n представима n-кратным тригонометрическим рядом Фурье вида

$$Z(z, \mu) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} Z_k(\mu) \exp\{i(k, z)\}. \qquad (1.16)$$

Применение оператора усреднения (12) к 2π-периодической функции $Z(z, \mu)$, естественно, дает

$$M_z[Z(z, \mu)] = Z_0(\mu), \qquad (1.17)$$

т. е. результатом усреднения является свободный член ряда Фурье (16).

Допустим теперь, что n-мерный вектор z представляется в виде

$$z = \omega t, \qquad (1.18)$$

где n-мерный числовой вектор $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ имеет компоненты, называемые *частотами*. Тогда

$$Z(\omega t, \mu) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} Z_k(\mu) \exp\{i(k, \omega)t\}. \qquad (1.19)$$

Применим оператор усреднения по времени (11), полагая, что $t_0 = 0$:

$$M_t[Z(\omega t, \mu)] = \overline{Z}(\mu) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T Z(\omega t, \mu)\, dt. \qquad (1.20)$$

Результат вычисления интеграла (20) существенно зависит от арифметических свойств чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Если частоты $\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_n$ рационально несоизмеримы, т. е. равенство

$$(k, \omega) = 0 \tag{1.21}$$

выполняется только при $\|k\| = 0$, то легко можно проверить, что

$$M_t[Z(\omega t, \mu)] = Z_0. \tag{1.22}$$

Таким образом, в случае рациональной несоизмеримости чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$ операции усреднения по всем переменным z и по времени дают одинаковый результат:

$$M_z[Z(z, \mu)] = M_t[Z(\omega t, \mu)]. \tag{1.23}$$

Если же числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рационально соизмеримы, т. е. равенство $(k, \omega) = 0$ справедливо и при некоторых целочисленных векторах k с отличной от нуля нормой, то в этом случае

$$M_t\,[Z(\omega t, \mu)] = \sum_{\|k\|\geqslant 0}' Z_k(\mu), \tag{1.24}$$

где штрих при сумме означает, что индекс-вектор суммирования принимает лишь «резонансные» значения, т. е. такие, для которых $(k, \omega) = 0$. Сравнивая выражения (24) и (17), заключаем, что при наличии резонанса частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$

$$M_t[Z(\omega t, \mu)] \neq M_z[Z(z, \mu)] \tag{1.25}$$

и, следовательно, результаты усреднения по времени t и по фазовым переменным z одной и той же функции $Z(z, \mu)$ не совпадают. Эти обстоятельства будут играть существенную роль в следующих главах при исследовании так называемых резонансных систем, а здесь отметим, что возможны и другие конструкции для операции сглаживания, в частности объединение процедур усреднения по t и по z.

Замечание. Результат усреднения по t с помощью оператора (11) зависит, вообще говоря, от параметра t_0. Этот вопрос достаточно подробно изучен В. М. Волосовым [20]. В абсолютном большинстве прикладных задач свойства решений уравнений сравнения существенно не зависят от t_0, поэтому в дальнейшем всегда будем считать $t_0 = 0$.

В заключение приведем формулировку теоремы Дирихле — Жордана [5] для функции скалярного аргумента.

Теорема 1.1. *Пусть функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на* $[0, 2\pi]$. *Тогда ее ряд Фурье в любой точке* $x_0 \in (0, 2\pi)$ *сходится к значению* $[f(x_0+0)+f(x_0-0)]/2$; *в частности, этот ряд сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности f.*

§ 1.4. Оператор усреднения при постоянных возмущениях

Операторам сглаживания (11), (12), (14) характерен общий недостаток: в процессе интегрирования вовсе не учитывается зависимость переменной z от времени t, т. е. никак не учитываются свойства дифференциального уравнения (1). Поэтому правомерной является постановка задачи о конструировании таких операторов усреднения, которые каким-то образом учитывали бы частично информацию о динамических свойствах решений. Построим два таких оператора.

Подставим в первоначальное дифференциальное уравнение (1) $\mu = 0$. Получим дифференциальное уравнение

$$dz^{(0)}/dt = Z(z^{(0)},\ t,\ 0) \equiv Z^{(0)}(z^{(0)},\ t), \tag{1.26}$$

названное Пуанкаре ([12], см. также [21]) *порождающим уравнением* для (1). Принято также называть уравнение (26) *вырожденным уравнением*.

Предположим, что известно общее решение порождающего уравнения (26)

$$z^{(0)}(t) = \varphi(t, C), \tag{1.27}$$

где C есть n-мерный вектор произвольных постоянных. Заменяя в функции Z переменную z на функцию φ, мы получаем новую функцию $Z^*(t, C, \mu)$, зависящую от параметров C, μ и от времени t:

$$Z^*(t, C, \mu) = Z(\varphi(t, C), t, \mu). \tag{1.28}$$

К функции Z^* можно применить оператор усреднения $M_t[Z]$, определяемый равенством (11):

$$M_t[Z^*(t, C, \mu)] = \overline{Z}^*(C, \mu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Z^*(t, C, \mu)\, dt. \tag{1.29}$$

Такая процедура усреднения впервые была применена астрономами при создании теории движения планет [8, 22]. В математической литературе она получила название *усреднение вдоль порождающего решения* [20]. Хотя такой оператор усреднения выглядит как будто более предпочтительным по сравнению с оператором (11) (в последнем векторная переменная z в процессе интегрирования считается постоянным параметром), само уравнение сравнения, построенное с помощью (29), принимает вид

$$d\bar{z}/dt = \overline{Z}^*(C, \mu). \tag{1.30}$$

В уравнении (30) в неявной форме подразумевается [20], что вектор C после выполнения процедуры усреднения выражается, вообще говоря, через $\bar{z}$. Если при решении порождающего уравнения (26) в качестве вектора C выбирается начальный вектор

z_0, то в таком случае некоторые авторы (см., например, [20, 23]) рекомендуют вектор C заменить на $\bar z$ в уравнении сравнения. Нельзя считать такую процедуру обоснованной, но ясно, что в противном случае, т. е. если в (30) положить $C = z_0$, уравнение сравнения (30) сразу же может быть проинтегрировано, и тогда

$$\bar z(t, \mu) = \bar Z^*(z_0, \mu)t + z_0.$$

Таким образом, оператор усреднения вдоль порождающего решения при строгом его применении дает, вообще говоря, худший результат даже по сравнению с оператором (11). Ведь трудно ожидать, чтобы решение первоначального уравнения (1) общего вида представлялось линейной функцией времени. Отсюда вытекает, что решения $z(t, \mu)$ и $\bar z(t, \mu)$ могут сильно различаться. Чтобы в некоторой степени устранить этот недостаток, был предложен другой оператор усреднения [8, 24], который может быть назван *оператором усреднения при постоянных возмущениях.*

Введем вместо искомой функции $z(t, \mu)$, определяемой первоначальным уравнением (1), новую переменную (*возмущение*) $p(t, \mu)$ по формуле

$$p(t, \mu) = z(t, \mu) - \varphi(t, C), \tag{1.31}$$

где $\varphi(t, C)$ — общее решение порождающего уравнения. Тогда для вектор-функции $z(t, \mu)$ легко можно получить дифференциальное уравнение

$$dp/dt = P(p, t, C, \mu) \equiv Z(p + \varphi, t, \mu) - Z^0(\varphi(t, C), t), \tag{1.32}$$

эквивалентное первоначальному уравнению. Применим к правой части (32) процедуру усреднения по времени t, считая в процессе интегрирования p, C, μ постоянными:

$$\bar P(p, C, \mu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T P(p, t, C, \mu)\,dt. \tag{1.33}$$

Этот оператор назовем *оператором усреднения при постоянных возмущениях* [17].

Таким образом, уравнение сравнения для (32) принимает вид

$$d\bar p/dt = \bar P(\bar p, C, \mu). \tag{1.34}$$

Если теперь написать уравнение сравнения для (1), построенное с помощью оператора усреднения при постоянных возмущениях, то будем иметь

$$d\bar z/dt = \bar P(\bar z - \varphi, C, \mu) + Z^0(\varphi, t). \tag{1.35}$$

З а м е ч а н и е 1. Алгоритм построения оператора усреднения при постоянных возмущениях обладает тем свойством, что правые части уравнений сравнения (34) и (35) автоматически содержат искомые функции $\bar{p}(t, \mu)$ и $\bar{z}(t, \mu)$ и по этой причине не возникает та неопределенная ситуация, которая имеет место при использовании оператора усреднения вдоль порождающего решения в форме (29).

Замечание 2. Описанные операторы усреднения могут применяться и в предположении, что известно не общее, а некоторое частное решение порождающего уравнения.

§ 1.5. Стандартные системы

В предыдущих параграфах приведены определения некоторых операторов сглаживания применительно к функциям многих переменных. Переходим теперь к построению уравнений сравнения для различных классов дифференциальных уравнений, описывающих периодические, почти периодические и вообще колебательные процессы. В историческом аспекте, как мы говорили выше, методы усреднения нашли сначала применение в задачах небесной механики при построении аналитических теорий движения планет солнечной системы, однако строгое обоснование их применимости в небесной механике стало возможным лишь в последние десятилетия. Поэтому мы рассмотрим в первую очередь так называемые стандартные системы обыкновенных дифференциальных уравнений в смысле Боголюбова, так как именно для таких уравнений Н. Н. Боголюбов (см. [25—28]) разработал строгую и полную математическую теорию обоснования применимости операторов сглаживания и получил оценки для норм отклонения решений первоначальных уравнений от решений уравнений сравнения.

Система

$$dz/dt = \mu Z(z, t, \mu), \qquad z(0) = z_0, \tag{1.36}$$

где z, Z — точки n-мерного евклидова пространства, называется *стандартной в смысле Боголюбова системой обыкновенных дифференциальных уравнений* (см. [17]).

Пусть функция сравнения $\bar{Z}$ определяется формулой (11)

$$\bar{Z}(z, \mu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z(z, t, \mu)\, dt. \tag{1.37}$$

Тогда уравнение сравнения для (36) является автономным и имеет вид

$$d\bar{z}/dt = \mu \bar{Z}(\bar{z}, \mu), \qquad \bar{z}(0) = z_0. \tag{1.38}$$

Уравнение

$$d\bar{z}/dt = \mu \bar{Z}(\bar{z}, 0), \qquad \bar{z}(0) = z_0 \tag{1.39}$$

называется *уравнением сравнения первого приближения* для (36), или усредненным уравнением первого приближения.

Уравнение сравнения (38) также может быть названо *уравнением сравнения первого приближения.* Различие между (38) и (39), как мы увидим ниже, состоит в том, что они порождают различные асимптотические разложения для решения первоначального уравнения.

Замена переменных, преобразующая (36) в (38), ищется в виде

$$z = \bar{z} + \mu u(\bar{z}, t, \mu). \tag{1.40}$$

Хронологически именно она получила в математической литературе название «*замена* (*преобразование*) *Крылова — Боголюбова*».

Уравнение, определяющее вектор-функцию $u(\bar{z}, t, \mu)$, можно назвать уравнением Крылова — Боголюбова для стандартных систем. Оно имеет вид

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \bar{Z}(\bar{z}, \mu)\right) + \frac{\partial u}{\partial t} = Z(\bar{z} + \mu u, t, \mu) - \bar{Z}(\bar{z}, \mu). \tag{1.41}$$

Асимптотическая теория дифференциальных уравнений, основанная на методе усреднения по времени, начала развиваться в работах Н. Н. Боголюбова именно с рассмотрения стандартных систем.

Рассмотрим простейший случай, когда вектор-функция Z 2π-периодична по t $(Z(z, t+2\pi) \equiv Z(z, t)$ для всех $z \in G_n)$ и дифференцируема по t. Тогда

$$Z(z, t) = \sum_{|k|\geqslant 0} Z_k(z) \exp\{ikt\}, \tag{1.42}$$

$$\bar{Z}(\bar{z}) = Z_0(\bar{z}), \tag{1.43}$$

и уравнение Крылова — Боголюбова для этого случая записывается в виде

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, Z_0(\bar{z})\right) + \frac{\partial u}{\partial t} = Z_0(\bar{z} + \mu u) - Z_0(\bar{z}) + \sum_{|k|\geqslant 1} Z_k(\bar{z} + \mu u)\exp\{ikt\}. \tag{1.44}$$

Нахождение вектор-функции $u(\bar{z}, t)$ из (44) в аналитическом виде представляется в общем случае невозможным, но если $Z(z, t)$ является аналитической функцией относительно z в области G_n, то с помощью асимптотических рядов возможно построить формальное представление для $u(\bar{z}, t)$.

Будем искать замену переменных (3) в виде

$$z = \bar{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k(\bar{z}, t). \tag{1.45}$$

Тогда вместо квазилинейного уравнения Крылова — Боголюбова

(41) получим бесконечную систему линейных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = Z(\bar z, t) - Z_0(\bar z) = \sum_{|k|\geqslant 1} Z_k(\bar z)\exp\{ikt\},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \left(\frac{\partial Z(\bar z, t)}{\partial \bar z}, u_1\right) - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar z}, Z_0\right), \tag{1.46}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \left(\frac{\partial Z(\bar z, t)}{\partial \bar z}, u_2\right) + \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{\partial^2 Z(\bar z, t)}{\partial \bar z^2}, u_1\right), u_1\right) - \left(\frac{\partial u_2}{\partial \bar z}, Z_0\right),$$

. . . .

которая интегрируется непосредственно. Действительно, последовательно выполняя необходимые выкладки, получим

$$u_1(\bar z, t) = \sum_{|k|\geqslant 1} \frac{1}{ik} Z_k(\bar z)\exp\{ikt\} + \varphi_1(\bar z), \tag{1.47}$$

$$u_2(\bar z, t) = \sum_{|k|\geqslant 1} \frac{1}{ik}\left(\frac{\partial Z_{-k}(\bar z)}{\partial \bar z}, Z_k(\bar z)\right)t +$$

$$+ \sum_{\substack{|k|\geqslant 0 \\ k+s\neq 0}} \sum_{|s|\geqslant 0} \frac{1}{i^2 s(k+s)}\left(\frac{\partial Z_k(\bar z)}{\partial \bar z}, Z_s(\bar z)\right)\exp\{i(k+s)t\} -$$

$$-\left(\sum_{\|k\|\geqslant 1} \frac{1}{i^2k^2}\frac{\partial Z_k(\bar z)}{\partial \bar z}\exp\{ikt\},\quad Z_0(\bar z) + \varphi_1(\bar z)t\right) + \varphi_2(\bar z), \tag{1.48}$$

. . . .

Алгоритм написания в явном виде уравнений (46) и их решений (47), (48) основан на построении степенных разложений по малому параметру μ. Таким образом, все слагаемые ряда (45) могут быть выписаны в явном виде. Чтобы замена (45) представляла формальное решение первоначальной стандартной системы (36), необходимо проинтегрировать усредненную систему

$$d\bar z/dt = \mu Z_0(\bar z), \qquad \bar z(0) = \bar z_0, \tag{1.49}$$

подставить ее решение $\bar z(t, \mu, \bar z_0)$ в равенство (45) и согласовать начальные условия, т. е. подобрать произвольные функции $\varphi_1(\bar z)$, $\varphi_2(\bar z)$, ... таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\bar z_0 + \mu u_1(\bar z_0, 0) + \mu^2 u_2(\bar z_0, 0) + \ldots = z_0. \tag{1.50}$$

Векторное равенство (50) содержит бесконечное число произвольных величин вида $\varphi_1(\bar z_0)$, $\varphi_2(\bar z_0)$, ..., поэтому выбор вектор-функций $\varphi_1(\bar z)$, $\varphi_2(\bar z)$, ... (за исключением одной из них) можно осуществить различными способами. Как видим, асимптотическое представление (45) не только осуществляет преобразование стандартных уравнений в уравнения сравнения, но и может быть использовано для написания приближенного решения начальных уравнений с асимптотикой типа $O(\mu^r)$ $(r=1, 2, \ldots)$, если мы ограничимся в степенных разложениях членами порядка $O(\mu^r)$.

Таким образом, замена переменных Крылова — Боголюбова (45) может быть интерпретирована как формула для асимптотической теории возмущений применительно к стандартным системам вида (36).

Изложенная методика обладает одной особенностью. Выражения для функций преобразования u_1, u_2, ... содержат много «нежелательных» вековых слагаемых типа $\varphi_s(\bar{z})t$. Их количество можно уменьшить, если в качестве системы сравнения вместо (49) взять систему

$$d\bar{z}/dt = \mu Z_0(\bar{z}) + \mu^2 A_2(\bar{z}) + \mu^3 A_3(\bar{z}) + \ldots, \tag{1.51}$$

где A_2, A_3, ...— пока неизвестные функции. Тогда вместо бесконечной системы (46) будем иметь систему

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= Z(\bar{z}, t) - Z_0(\bar{z}),\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= \left(\frac{\partial Z(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}}, u_1\right) - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}}, Z_0\right) - A_2(\bar{z}),\\
\frac{\partial u_3}{\partial t} &= \left(\frac{\partial Z(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}}, u_2\right) + \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{\partial^2 Z(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}^2}, u_1\right), u_1\right) - \left(\frac{\partial u_2}{\partial \bar{z}}, Z_0\right) - A_3(\bar{z}),
\end{aligned} \tag{1.52}$$

. . . .

в которую входят неизвестные функции $A_2(\bar{z})$, $A_3(\bar{z})$, ... Они могут быть определены различными способами, но наиболее подходящим следует считать такой, при котором средние значения по t правых частей уравнений (52) равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned}
A_2(\bar{z}) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left[\left(\frac{\partial Z(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}}, u_1\right) - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}}, Z_0\right)\right] dt,\\
A_3(\bar{z}) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left[\left(\frac{\partial Z(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}}, u_2\right) + \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{\partial^2 Z(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}^2}, u_1\right), u_1\right) - \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \left(\frac{\partial u_2}{\partial \bar{z}}, Z_0\right)\right] dt,
\end{aligned} \tag{1.53}$$

. . . .

Такой способ определения $A_k(\bar{z})$ позволяет уничтожить некоторые вековые члены вида $\varphi(\bar{z})t$ в выражениях для $u_1(\bar{z}, t)$, $u_2(\bar{z}, t)$, ...

Следует подчеркнуть, что в процессе вычисления интегралов (53) $\bar{z}$ считается параметром, а не функцией t.

Развитие и применение аналитического аппарата для построения замен переменных (40) и (45) в прикладных задачах становятся эффективными и математически обоснованными, если удается получить оценки для нормы $\|z(t, \mu) - \bar{z}(t, \mu)\|$, где $z(t, \mu)$ — решение первоначальной стандартной системы (36), $\bar{z}(t, \mu)$ — решение усредненной системы первого приближения (39) или усредненной системы любого конечного m-го приближения

$$d\bar{z}/dt = \mu\bar{Z}(\bar{z}, 0) + \mu^2 A_2(\bar{z}) + \ldots + \mu^m A_m(\bar{z}). \qquad (1.54)$$

Классическая теорема, устанавливающая ε-оценку для нормы $\|z(t, \mu) - \bar{z}(t, \mu)\|$, принадлежит Н. Н. Боголюбову [29].

Теорема 1.2 (Н. Н. Боголюбов). *Пусть*:

1) *вектор-функция* $Z(z, t, \mu)$ *определена в открытой связной области* $G_{n+2} = G_n \times \mathbf{R}_1 \times [0, \mu^*]$, *ограничена в ней и удовлетворяет относительно* z *условию Липшица*;

2) *существует равномерное относительно* $z \in G_n$ *интегральное среднее, определяемое оператором* (11);

3) *усредненная система первого приближения* (39) *имеет решение* $\bar{z}(t, \mu)$, *определенное для* $t \in [0, \infty)$ *и лежащее в* G_n *вместе с некоторой* ρ-*окрестностью*.

Тогда для любых сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ *и сколь угодно большого* $A > 0$ *существует* $\mu_0(\varepsilon, A) > 0$ *такое, что для всех* μ *из интервала* $0 \leqslant \mu < \mu_0$ *и для всех* t *из интервала* $0 \leqslant t \leqslant A\mu^{-1}$ *справедлива оценка*

$$\|z(t, \mu) - \bar{z}(t, \mu)\| < \varepsilon, \qquad z(0, \mu) = \bar{z}(0, \mu). \qquad (1.55)$$

Следует подчеркнуть, что равномерное среднее значение некоторой функции понимается в смысле следующего определения: вектор-функция $\bar{Z}$ называется *равномерным средним значением* относительно z для вектор-функции Z в области $z \in G_n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая не зависящая от z величина $T(\varepsilon) > 0$, что при любом $\tau \geqslant T(\varepsilon)$ неравенство

$$\left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau Z(z, t)\, dt - \bar{Z}(z) \right\| < \varepsilon \qquad (1.56)$$

выполняется для всех $z \in G_n$.

Теорема Боголюбова послужила отправной точкой для многочисленных научных исследований по асимптотической теории дифференциальных уравнений, теории нелинейных колебаний, нелинейной механике [20, 23, 30—45].

Рассмотрим теперь функцию $\overline{Z}_r(z, \mu)$, определенную интегральным соотношением

$$\overline{Z}_r(z, \mu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^r} \int_0^T Z(z, t, \mu)\, dt.$$

Назовем число r *показателем усреднения* функции $Z(z, t, \mu)$ в G_{n+2}, если предыдущий предел конечен. Если этот предел существует равномерно относительно $z \in G_n$, тогда r назовем *равномерным показателем усреднения функции* $Z(z, t, \mu)$. Если функция $Z(z, t, \mu)$ имеет хотя бы один показатель усреднения, то она имеет континуум показателей, заполняющих интервал $[r, \infty)$. Существуют функции, не имеющие ни одного показателя усреднения, например функция e^t. Вопрос о связи показателя усреднения r и ε-близости решений $z(t, \mu)$ и $\overline{z}(t, \mu)$ систем (36) и (39) обсуждается в работе [46].

§ 1.6. О структуре асимптотических разложений

В § 1.5 написаны два уравнения сравнения первого приближения для стандартной системы (36). Это уравнения (39) и (38):

$$d\overline{z}/dt = \mu\overline{Z}(\overline{z}, 0), \qquad \overline{z}(0) = z_0,$$
$$d\overline{z}/dt = \mu\overline{Z}(\overline{z}, \mu), \qquad \overline{z}(0) = z_0.$$

Если Z не зависит от малого параметра μ, то, как видно из выражения для формального ряда, составляющего замену переменных, он представляет собой обычный степенной ряд по степеням μ. Иначе обстоит дело в том случае, когда функция $Z = Z(z, t, \mu)$. Чтобы избежать путаницы, обозначим именно этот малый параметр символом β, т. е. рассмотрим уравнение

$$dz/dt = \mu Z(z, t, \beta), \qquad z(0) = z_0, \tag{1.57}$$

вместо (36). В этом случае вместо замены переменных (45) следует искать замену, преобразующую уравнение (57) в уравнение сравнения (38) или (39), в виде

$$z = \overline{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k(\overline{z}, t, \beta). \tag{1.58}$$

Функции преобразования $u_k(\overline{z}, t, \beta)$ явно зависят от малого параметра β. Действительно, если замена (58) преобразует (57) в (38), то функция $u_1(\overline{z}, t, \beta)$ определяется из уравнения

$$\partial u_1/\partial t = Z(\overline{z}, t, \beta) - \overline{Z}(\overline{z}, \beta), \tag{1.59}$$

из которого видна явная зависимость u_1 от β.

Для уравнения сравнения (39) будем иметь

$$\partial u_1/\partial t = Z(\overline{z}, t, \beta) - \overline{Z}(\overline{z}, 0), \tag{1.60}$$

и явная зависимость u_1 от параметра β также усматривается. Можно показать, что уравнения для u_2, u_3 и т. д. также содержат зависимость от параметра β, поэтому указанные функции также зависят от β.

Изложенные соображения указывают на то, что замена (58) в общем случае не является обычным степенным рядом по степеням малого параметра μ, так как функции $u_k(\bar{z}, t, \beta)$ зависят от параметра β, равного на самом деле величине μ.

Если рассматривать замену переменных (58) как формальное решение обыкновенных дифференциальных уравнений теории возмущений, то целесообразно говорить о том, что выражение

$$z(t, \mu, \beta) = \bar{z}(t, \mu, \beta) + \sum_{k=1}^{n} \mu^k u_k(\bar{z}(t, \mu, \beta), t, \beta) \qquad (1.61)$$

дает приближенное асимптотическое решение теории возмущений n-го порядка в смысле Крылова — Боголюбова.

Действительно, если ряд (58) является асимптотическим, то можно выписать для решения первоначального уравнения асимптотическое разложение

$$z(t, \mu, \beta) = z(t, \mu, \beta) + \sum_{k=1}^{n} \mu^k u_k(z, t, \beta) + O\left(\mu^{n+1}\right), \qquad (1.62)$$

которое можно рассматривать как приближенное решение уравнения (57) с погрешностью $O(\mu^{n+1})$. Отсюда следует, что теория возмущений, основанная на методе Крылова — Боголюбова, не совпадает с классической теорией возмущений, где строятся стандартные разложения по степеням малого параметра.

Теория возмущений n-го порядка в смысле Крылова — Боголюбова содержит возмущения любого порядка (не только до n-го), найденные классическими методами теории возмущений. Если вектор-функция $Z(z, t, \beta)$ является аналитической относительно $\beta \in [0, \mu^*]$, то в этом случае можно ожидать, что функции $u_k(\bar{z}, t, \beta)$ также окажутся аналитическими относительно $\beta \in [0, \mu_*] \subset [0, \mu^*]$, где существование величины μ_* гарантируется теоремой Коши о существовании аналитического решения. Но при этих условиях функции $u_k(\bar{z}, t, \beta)$ могут быть представлены в виде рядов по степеням β, и, подставляя их в формулу для замены переменных (58), можно «перестроить» полученные разложения в классические разложения теории возмущений по степеням малого параметра μ.

Таким образом, в общем случае представление (58) не является классическим степенным рядом по степеням μ. Метод Крылова — Боголюбова предоставляет математику возможность построить теорию возмущений обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью неклассических асимптотических представлений (61), (62).

§ 1.7. Системы с медленными и быстрыми переменными без частотных резонансов

Пусть дана $m+n$-мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = \mu X(x,\ y,\ t,\ \mu), \quad dy/dt = \omega(x,\ y,\ t) + \mu Y(x,\ y,\ t,\ \mu), \tag{1.63}$$

где x, X — m-мерные векторы, y, Y, ω — n-мерные векторы, $t \in \mathbf{R}_1$, $\mu \in [0,\ \mu^*]$. Векторы ω, X, Y определены в некоторой $m+n+2$-мерной области

$$G_{m+n+2} = \{(x,\ y,\ t,\ \mu): x \in P_m,\ y \in G_n,\ t \in \mathbf{R}_1,\ \mu \in [0,\ \bar{\mu}]\}.$$

Система (63) называется *многочастотной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с медленными и быстрыми переменными*. Вектор x называется *вектором медленных переменных*, y — *вектором быстрых переменных*, ω — *вектором частот*.

Для сглаживания системы (63) чаще всего используются операторы сглаживания, описанные в § 1.4. Они строятся следующим образом.

При $\mu = 0$ система (63) переходит в порождающую:

$$dx^{(0)}/dt = 0, \quad dy^{(0)}/dt = \omega(x^{(0)},\ y^{(0)},\ t).$$

Допустим, что ее общее решение известно:

$$x^{(0)} = c, \quad y^{(0)} = \varphi(x, C), \tag{1.64}$$

где c, C — произвольные постоянные. Вычислим теперь интегральное среднее функций X и Y вдоль порождающего решения (64):

$$\overline{X}(c,\ C,\ \mu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(c,\ \varphi(t,\ C),\ t,\ \mu)\, dt,$$

$$\overline{Y}(c,\ C,\ \mu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y(c,\ \varphi(t,\ C),\ t,\ \mu)\, dt$$

и напишем, следуя В. М. Волосову и Б. И. Моргунову (см. [20, 23]), усредненную систему первого приближения:

$$d\bar{x}/dt = \mu \overline{X}(\bar{x},\ C,\ \mu), \quad d\bar{y}/dt = \omega(\bar{x},\ \bar{y},\ t) + \mu \overline{Y}(\bar{x},\ C,\ \mu). \tag{1.65}$$

Написание системы (65) неявно предполагает после усреднения замену вектора c на искомый усредненный вектор $\bar{x}$, что является, вообще говоря, необоснованной операцией. Тем не менее для системы (63) и системы сравнения (65) В. М. Волосовым [20] разработана эффективная схема сглаживания правых частей с применением оператора усреднения вдоль порождающего решения и рассмотрены вопросы обоснования метода усреднения для многочастотных систем с медленными и быстрыми переменными без резонансов. Можно сказать, что в работах В. М. Волосова неявно предполагается отсутствие соотношений вида $(k, \omega(x, y, t)) \approx 0$ в пространстве переменных x, y, t, которые представляют собой основную характеристику резонансных систем (точнее, систем с резонансами основных частот), рассматриваемых в следующих главах.

Учитывая это, введем вместо x, y новые переменные p, q по формулам

$$p = x - x^{(0)} = x - c, \quad q = y - y^{(0)} = y - \varphi(t, C). \tag{1.66}$$

Переменные p, q можно интерпретировать как отклонения x, y от порождающего решения (65).

Многочастотная система

$$\begin{aligned} dp/dt &= \mu X(p + c, q + \varphi(t, C), t, \mu), \\ dq/dt &= \omega(p + c, q + \varphi(t, C), t) - \omega(c, \varphi(t, C), t) + \\ &\qquad + \mu Y(p + c, q + \varphi(t, C), t, \mu) \end{aligned} \tag{1.67}$$

эквивалентна первоначальной системе (63), поэтому ниже будем излагать асимптотическую теорию для системы (67).

Определим теперь функции сравнения для X, Y по формулам

$$\begin{aligned} \overline{X}(p, q, c, C, \mu) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(p + c, q + \varphi(t, C), t, \mu)\, dt, \\ \overline{Y}(p, q, c, C, \mu) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Y(p + c, q + \varphi(t, C), t, \mu)\, dt, \end{aligned} \tag{1.68}$$

означающим результат усреднения при постоянных возмущениях.

Тогда система сравнения для (67) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} d\bar{p}/dt &= \mu \overline{X}(\bar{p}, \bar{q}, c, C, \mu), \\ d\bar{q}/dt &= \omega(\bar{p} + c, \bar{q} + \varphi(t, C), t) - \omega(c, \varphi(t, C), t) + \\ &\qquad + \mu \overline{Y}(\bar{p}, \bar{q}, c, C, \mu). \end{aligned} \tag{1.69}$$

Из (69) видно, что подсистема для медленных переменных $\bar{p}$ является автономной, хотя в целом система (69) зависит явно от времени.

Систему (69) можно назвать по аналогии с (38) усредненной системой первого приближения, хотя, согласно методу Крылона — Боголюбова, чаще всего этот термин применяется к системе

$$
\begin{aligned}
&d\bar{p}/dt = \mu X(\bar{p}, \bar{q}, c, C, 0),\\
&d\bar{q}/dt = \omega(\bar{p} + c, \bar{q} + \varphi(t, C), t) - \\
&\qquad\qquad - \omega(c, \varphi(t, C), t) + \mu\overline{Y}(\bar{p}, \bar{q}, c, C, 0).
\end{aligned}
\tag{1.70}
$$

Наряду с системами первого приближения (69) или (70) рассмотрим системы сравнения более общего вида:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dp}{dt} = \mu\overline{X}(\bar{p}, \bar{q}, c, C, \beta) + \sum_{k\geqslant 2}\mu^k A_k(\bar{p}, \bar{q}, \beta),\\
&\frac{dq}{dt} = \omega(p + c, q + \varphi(t, C), t) - \omega(c, \varphi(t, C), t) + \\
&\qquad + \mu\overline{Y}(\bar{p}, q, c, C, \beta) + \sum_{k\geqslant 2}\mu^k B_k(\bar{p}, \bar{q}, \beta);
\end{aligned}
\tag{1.71}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\bar{p}}{dt} = \mu\overline{X}(\bar{p}, \bar{q}, c, C, 0) + \sum_{k\geqslant 2}\mu^k A_k(\bar{p}, \bar{q}),\\
&\frac{dq}{dt} = \omega(\bar{p} + c, \bar{q} + \varphi(t, C), t) - \omega(c, \varphi(t, C), t) + \\
&\qquad + \mu\overline{Y}(\bar{p}, \bar{q}, c, C, 0) + \sum_{k\geqslant 2}\mu^k B_k(\bar{p}, \bar{q}),
\end{aligned}
\tag{1.72}
$$

которые играют роль основных уравнений при построении асимптотической теории Крылова — Боголюбова любого конечного приближения для систем с медленными и быстрыми переменными.

Следуя общей идее метода Крылова — Боголюбова, будем искать замену переменных

$$
p = \bar{p} + \mu u(\bar{p}, \bar{q}, t, \beta), \qquad q = \bar{q} + \mu v(\bar{p}, \bar{q}, t, \beta), \tag{1.73}
$$

которая преобразовывает систему (67) в любую из систем сравнения (69)—(72). Например, для преобразования (67)→(69) мы получаем следующую систему квазилинейных уравнений в частных производных для неизвестных вектор-функций $u(\bar{p}, \bar{q}, t, \beta)$, $v(\bar{p}, \bar{q}, t, \beta)$:

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{p}}, \overline{X}(\bar{p}, \bar{q}, \beta)\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{q}}, \omega(\bar{p}, \bar{q} + \varphi(t), t) - \omega(0, \varphi(t), t) + \right.\\
&\left. + \mu\overline{Y}(\bar{p}, \bar{q}, \beta)\right) + \frac{\partial u}{\partial t} = X(\bar{p} + \mu u, q + \mu v + \varphi(t), t, \beta) - \overline{X}(\bar{p}, \bar{q}, \beta),\\
&\mu^2\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{p}}, \overline{X}(\bar{p}, \bar{q}, \beta)\right) + \mu\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{q}}, \omega(\bar{p}, q + \varphi(t), t) - \right.\\
&\qquad \left. - \omega(0, \varphi(t), t) + \mu\overline{Y}(\bar{p}, \bar{q}, \beta)\right) + \mu\frac{\partial v}{\partial t} = \\
&\qquad = \omega(\bar{p} + \mu u, \bar{q} + \mu v + \varphi(t), t) - \omega(\bar{p}, q + \varphi(t), t) + \\
&\qquad\qquad + \mu Y(\bar{p} + \mu u, \bar{q} + \mu v + \varphi(t), t, \beta) - \mu\overline{Y}(\bar{p}, \bar{q}, \beta).
\end{aligned}
\tag{1.74}
$$

Система (74) представляет собой векторное уравнение Крылова — Боголюбова для преобразования систем с медленными и быстрыми переменными (63) в уравнения сравнения первого приближения (69). Аналогичный вид имеют уравнения в частных производных, определяющие u и v для преобразований (67)→(70), (67)→(71) и (67)→(72). Для преобразования (67)→(70) уравнение Крылова — Боголюбова имеет в точности вид (74) с той лишь разницей, что в функциях $\overline{X}$, $\overline{Y}$ следует положить $\beta = 0$.

Для преобразования (67)→(71) система уравнений Крылова — Боголюбова имеет вид

$$
\begin{gathered}
\mu\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{p}}, \overline{X}(\bar{p}, \bar{q}, \beta) + \sum_{k\geqslant 2} \mu^{k-1} A_k(\bar{p}, \bar{q}, \beta)\right) + \\
+ \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{q}}, \omega(\bar{p}, \bar{q} + \varphi(t), t) - \omega(0, \varphi(t), t) + \right. \\
\left. + \mu\overline{Y}(\bar{p}, \bar{q}, \beta) + \sum_{k\geqslant 2} \mu^k B_k(\bar{p}, \bar{q}, \beta)\right) + \frac{\partial u}{\partial t} = \\
= X(\bar{p} + \mu u, \bar{q} + \mu v + \varphi(t), t, \beta) - \overline{X}(\bar{p}, \bar{q}, \beta), \\
\mu^2\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{p}}, \overline{X}(\bar{p}, \bar{q}, \beta) + \sum_{k\geqslant 2} \mu^{k-1} A_k(\bar{p}, \bar{q}, \beta)\right) + \qquad (1.75) \\
+ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{q}}, \omega(\bar{p}, \bar{q} + \varphi(t), t) - \omega(0, \varphi(t), t) + \right. \\
\left. + \mu\overline{Y}(\bar{p}, \bar{q}, \beta) + \sum_{k\geqslant 2} \mu^k B_k(\bar{p}, \bar{q}, \beta)\right) + \mu\frac{\partial v}{\partial t} = \\
= \omega(\bar{p} + \mu u, \bar{q} + \mu v + \varphi(t), t) - \omega(\bar{p}, \bar{q} + \varphi(t), t) + \\
+ \mu Y(\bar{p} + \mu u, \bar{q} + \mu v + \varphi(t), t, \beta) - \mu\overline{Y}(\bar{p}, \bar{q}, \beta).
\end{gathered}
$$

Чтобы получить уравнение Крылова — Боголюбова для преобразования (67)→(72), необходимо заменить в уравнениях (75) функции $\overline{X}(\bar{p}, \bar{q}, \beta)$, $\overline{Y}(\bar{p}, \bar{q}, \beta)$ на функции $\overline{X}(\bar{p}, \bar{q}, 0)$, $\overline{Y}(\bar{p}, \bar{q}, 0)$ соответственно.

Нахождение функций преобразования u, v из уравнений Крылова — Боголюбова (74), (75) в аналитической форме в общем случае не представляется возможным, однако есть такие интересные для приложений случаи, когда это возможно сделать. О них будет рассказано ниже, а здесь мы приведем формулировку теоремы Волосова [20], устанавливающую ε-близость медленных переменных многочастотных уравнений вида (63) и медленных переменных, определяемых усредненными уравнениями первого приближения (65), на асимптотически большом промежутке времени.

Теорема 1.3 (В. М. Волосов). *Пусть:*

1) *вектор-функции* $X(x, y, t, \mu)$, $Y(x, y, t, \mu)$ *определены и непрерывны в открытой* $m+n+1$*-мерной области* G_{m+n+1} *при* $\mu\in[0, \mu^*]$;

2) X, Y *равномерно ограничены в* G_{m+n+1} *и непрерывны по* μ *равномерно относительно всех переменных;*

3) *вектор-функция* $X^{(0)}(x, y, t)=X(x, y, t, 0)$ *непрерывна по переменным* x, y, t *и удовлетворяет по* x, t *условию Липшица с общей для всей области* G_{m+n+1} *постоянной, а по переменным* y *имеет непрерывные ограниченные частные производные* $\partial X^{(0)}/\partial y$;

4) *вектор-функция* $Y(x, y, t, \mu)$ *удовлетворяет по* x, y, t *условию Липшица, имеет производную* $\partial Y/\partial\mu$, *непрерывную по* μ *равномерно относительно всех переменных, а функция* $Y_1(x, y, t)\equiv\partial Y/\partial\mu|_{\mu=0}$ *непрерывна по* x, y, t, *удовлетворяет по* x, t *условию Липшица с общей для области* G_{m+n+1} *постоянной и имеет непрерывные, равномерно ограниченные в* G_{m+n+1} *частные производные по* y;

5) *интегральные средние функций* X *и* Y *вдоль порождающего решения существуют равномерно относительно всей совокупности начальных условий из* G_{m+n+1} *в смысле определения из* § 1.5;

6) *решение системы* (65) *при* $t\geqslant 0$ *не выходит из* G_{m+n+1}.

Тогда для произвольных чисел $\varepsilon>0$, $A>0$ *существует* $\mu_0\in[0, \mu^*]$ *такое, что при* $0\leqslant\mu\leqslant\mu_0$ *для всех* $t\in[0, A/\mu]$ *выполняется* ε*-оценка для нормы*

$$\|x(t, \mu)-\bar{x}(t, \mu)\|<\varepsilon,\quad x(0, \mu)=\bar{x}(0, \mu),\tag{1.76}$$

где $x(t, \mu)$ — *вектор медленных переменных, определяемых первоначальной системой* (63), $\bar{x}(t, \mu)$ — *вектор медленных переменных, определяемых первой подсистемой* (65).

Основываясь на этой теореме, В. М. Волосов и его ученики (Б. И. Моргунов, Г. Н. Медведев, Ф. Л. Черноусько и др.) разработали методы расчета стационарных колебательных режимов большого числа нелинейных систем и изучили их устойчивость [47—49].

Аналогичные теоремы обоснования метода усреднения, устанавливающие ε-малость нормы $\|x(t, \mu)-\bar{x}(t, \mu)\|$, получены и для случая, когда сглаженный вектор $\bar{x}(t, \mu)$ является решением усредненного уравнения 2-го приближения [50, 51]

$$d\bar{x}/dt=\mu\bar{X}(\bar{x}, C)+\mu^2A_2(\bar{x}).\tag{1.77}$$

В заключение заметим, что ε-близость возмущений $p(t, \mu)$ и $\bar{p}(t, \mu)$, определяемых уравнениями (67) и (70), на асимптотически большом интервале времени $0\leqslant t\leqslant A\mu^{-1}$ также имеет место. Что касается ε-близости быстрых переменных ($y(t, \mu)$ и $\bar{y}(t, \mu)$ или $q(t, \mu)$ и $\bar{q}(t, \mu)$), то вопрос остается открытым.

§ 1.8. Системы с быстрыми переменными без частотных резонансов

Рассмотрим n-мерное дифференциальное уравнение

$$dx/dt = X(x) + \mu Y(x, t, \mu), \tag{1.78}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ суть n-мерные векторы, и, кроме того, пусть вектор $Y(x, t, \mu)$ аналитичен по μ в области $0 \leqslant \mu \leqslant \mu^*$, т. е.

$$Y(x, t, \mu) = Y_0(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \tilde{Y}_k(x, t), \tag{1.79}$$

где $\tilde{Y}_k(x, t)$ — коэффициенты разложения Y по степеням μ.

Обозначим общее решение порождающего уравнения

$$dx^{(0)}/dt = X(x^{(0)}) \tag{1.80}$$

через

$$x^{(0)}(t) = \varphi\left(t, x_0^{(0)}\right). \tag{1.81}$$

Покажем прежде всего, что существует формальная замена переменных $x \to \bar{x}$, преобразующая уравнение (78) в уравнение

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = X(\bar{x}) + \mu \overline{Y}_0(\bar{x}) + \sum_{k=2}^{\infty} \mu^k \overline{Y}_k(\bar{x}), \tag{1.82}$$

правая часть которого не содержит в явном виде t. Преобразование $x \to \bar{x}$ будем искать в виде

$$x = \bar{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k(\bar{x}, t). \tag{1.83}$$

Вектор-функции $u_k(\bar{x}, t)$, $\overline{Y}_0(x)$, $\overline{Y}_k(\bar{x})$ подлежат определению. Если в уравнении (78) перейти к новым искомым функциям $\bar{x}$, то после очевидных, но громоздких выкладок можно вывести уравнение в частных производных первого порядка, определяющее вектор $u_k(\bar{x}, t)$. Оно имеет вид

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}}, X(\bar{x})\right) = \left(\frac{\partial X(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, u_k\right) + U_k(\bar{x}, t). \tag{1.84}$$

Вектор-функции $U_k(\bar{x}, t)$ зависят от $\overline{Y}_0, \ldots, \overline{Y}_{k-1}$ и $u_k, \ldots, u_{k-1}$. В частности, функция $u_1(\bar{x}, t)$, определяющая усредненное уравнение первого приближения, представляет собой решение уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}}, X(\bar{x})\right) = \left(\frac{\partial X(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, u_1\right) + Y_0(x, t) - \overline{Y}_0(\bar{x}). \tag{1.85}$$

Уравнения (84) и (85) являются векторными, и встречающиеся в них произведения суть скалярные, т. е.

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}}, X(\bar{x})\right) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_s} X_s(\bar{x}),$$
$$\left(\frac{\partial X(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, u_k\right) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial \bar{x}_s} u_k^{(s)}. \tag{1.86}$$

Заметим, что пока не определены каким-либо образом $\bar{Y}_0, \ldots, \bar{Y}_{k-1}$, вектор-функция $U_k(\bar{x}, t)$ также неизвестна.

Таким образом, для формального преобразования уравнения (78) в уравнение (82) необходимо решить систему уравнений в частных производных (84) для $k = 1, 2, \ldots$ при условии, что $\bar{Y}_k$ каким-либо способом выбраны.

Вместо системы (84) рассмотрим характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = X(\bar{x}), \quad \frac{du_k}{dt} = \left(\frac{\partial X(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, u_k\right) + U_k(\bar{x}, t). \tag{1.87}$$

Система (87) расщепляется на две системы, каждая из которых имеет порядок n. Более того, первые n уравнений составляют порождающую систему (83), общее решение которой считается известным (см. (81)), поэтому для определения характеристик необходимо решить систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_k}{dt} = \left(\frac{\partial X(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, u_k\right) + U_k(\bar{x}, t). \tag{1.88}$$

Но векторное уравнение $du_k/dt = (\partial X(\bar{x})/\partial \bar{x}, u_k)$ является уравнением в вариациях для порождающей системы, поэтому, согласно теореме Пуанкаре [12], общий его интеграл находится путем дифференцирования общего решения (81) по произвольным постоянным. Следовательно, общее решение уравнения (88) в принципе определяется в квадратурах.

Если известны $2n$ независимых первых интегралов системы (87), то нахождение решения уравнения в частных производных (84) не представляет особых трудностей [12].

Итак, математический формализм теории рядов пригоден и для системы (78), в которой искомый вектор x состоит только из быстрых движений.

Усредненным уравнением первого приближения для (78) является n-мерное дифференциальное уравнение

$$d\bar{x}/dt = X(\bar{x}) + \mu \bar{Y}_0(\bar{x}). \tag{1.89}$$

Обоснование метода усреднения для уравнения (78) выражает следующая

Теорема 1.4 (Е. А. Гребеников [34]). *Пусть:*

1) *вектор-функции* $X(x)$, $Y(x, t, \mu)$ *непрерывны и равномерно ограничены вместе с производными* $\partial X/\partial x$, $\partial Y/\partial x$, $\partial^2 X/\partial x^2$, $\partial^2 Y/\partial x^2$ *в некоторой открытой* $n+1$*-мерной области* G_{n+1} *и удовлетворяют в этой области условию Липшица по переменным* x *с общей постоянной;*

2) *существует равномерное среднее для* Y_0 *относительно всех начальных условий из* G_{n+1} *вдоль порождающего решения*

$$\overline{Y}_0(\overline{x}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y_0(\varphi(t, \overline{x}), t)\, dt;$$

3) *решение системы* (89) *для любых* $t \geqslant 0$ *не выходит из области* G_{n+1}.

Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $A > 0$ *можно найти такое* $\mu_0 \in (0, \mu^*]$, *что при любых* $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$ *неравенство* $\|x(t, \mu) - \overline{x}(t, \mu)\| < \varepsilon$ *выполняется для всех* $0 \leqslant t \leqslant A\mu^{-1}$.

§ 1.9. Многочастотные автономные вращательные системы без частотных резонансов

Автономные системы $m+n$-го порядка

$$dx/dt = \mu X(x, y, \mu), \quad dy/dt = \omega(x) + \mu Y(x, y, \mu), \tag{1.90}$$

где $X(x, y+(2\pi), \mu) \equiv X(x, y, \mu)$, $Y(x, y+(2\pi), \mu) \equiv Y(x, y, \mu)$, а вектор частот ω, в отличие от (63), зависит только от медленных переменных x, назовем *многочастотными автономными вращательными системами.* Здесь векторы x, X — m-мерные, а y, ω, Y — n-мерные. Медленные переменные x — это позиционные переменные, а быстрые переменные y — угловые переменные.

При известных предположениях [5, 6] вектор-функции X, Y представимы n-кратными рядами Фурье вида

$$\begin{aligned} X(x, y, \mu) &= \sum_{\|k\|\geqslant 0} X_k(x, \mu) \exp\{i(k, y)\}, \\ Y(x, y, \mu) &= \sum_{\|k\|\geqslant 0} Y_k(x, \mu) \exp\{i(k, y)\}, \end{aligned} \tag{1.91}$$

коэффициенты которых зависят от позиционных переменных x и малого параметра μ. Вращательные системы вида (90) играют большую роль в аналитической и небесной механике, в гироскопии и других областях знания.

Если 2π-периодические по y вектор-функции $X(x, y, \mu)$, $Y(x, y, \mu)$ удовлетворяют условиям теоремы Дирихле [5, 6] и к тому же являются аналитическими относительно x в некоторой области $G_{m+n} = \{(x, y): x \in P_m, \|\mathrm{Im}\, y\| \in Q_n\}$, то для систем вида (90) можно построить асимптотическую теорию возмущений в смысле Крылова — Боголюбова до любого порядка [17] в аналитическом виде. Но сначала изложим некоторые предварительные соображения.

Случай $n=1$ (вектор быстрых переменных y является одномерным) подробно изучен Н. Н. Боголюбовым и Д. Н. Зубаревым [30]. Он интересен не только с точки зрения теории, но и своими приложениями в динамике заряженных частиц в магнитном поле. При $n \geqslant 2$ исследование вращательных систем (90) существенно осложняется из-за возможного появления резонансов частот.

Если вектор частот ω является постоянным, то с помощью замены переменных

$$\tilde{x}=x, \qquad \tilde{y}=y-\omega t \tag{1.92}$$

вращательную систему (90) можно привести к стандартной системе вида (36); поэтому к ней применимы результаты из § 1.5.

Поведение решений вращательных систем (90) существенно зависит от наличия или отсутствия частотных резонансов. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Порождающая система для (90) представляется уравнениями

$$dx^{(0)}/dt=0, \qquad dy^{(0)}/dt=\omega(x^{(0)}) \tag{1.93}$$

и, естественно, является интегрируемой, с решением

$$x^{(0)}=x_0=c, \qquad y^{(0)}=\omega(x_0)t+y_0=\omega(x_0)t+C, \tag{1.94}$$

где x_0, y_0 — начальные значения x, y.

Если соотношения вида

$$(k, \omega(x)) \neq 0 \tag{1.95}$$

выполняются для всех $x \in P_m$ и всех k с нормой $\|k\| \neq 0$, то применение к функциям $X(x, y, \mu)$, $Y(x, y, \mu)$ оператора усреднения вдоль порождающего решения и оператора усреднения при постоянных возмущениях (см. § 1.4) дают одинаковый результат:

$$\begin{aligned} M_t[X]&=X_0(x)=X_0(p+x_0),\\ M_t[Y]&=Y_0(x)=Y_0(p+x_0), \end{aligned} \tag{1.96}$$

и к таким вращательным системам без частотных резонансов применимы преобразование Крылова — Боголюбова и теорема обоснования Волосова, приведенные в § 1.7. Более того, в этом случае, как мы увидим ниже, удается построить в аналитическом виде преобразование Крылова — Боголюбова вида (73), но, к сожалению, условие (95) является весьма жестким и, что самое главное, трудно проверяемым вдоль решения $x(t, x_0, y_0, \mu)$ при $t \geqslant 0$. Иными словами, мы не знаем априорных условий, которые позволили бы разделить область G_{m+n} на множества резонансных и нерезонансных точек, поэтому целесообразно сначала рассматривать так называемые практически нерезонансные автономные вращательные системы, т. е. системы, траектории которых удовлетворяют условию (95) не для всех целочисленных векторов k, а для таких, норма которых ограничена сверху:

$$0 \leqslant \|k\| \leqslant N. \tag{1.97}$$

К выбору числа N вернемся в § 1.10.

Наряду с автономными нерезонансными вращательными системами, которые из-за выполнения условия (95) можно считать слишком экзотическими, целесообразно изучать системы, обладающие *свойством застревания* в окрестности резонансных точек. Под этим подразумевается, что траектория $x(t, x_0, y_0, \mu)$ с изменением t при $t=t^*$ может оказаться в малой окрестности некоторой точки x^*, удовлетворяющей условию $(k, \omega(x^*))=0$, $0 \leqslant \|k\| \leqslant N$, и застрянет в этой окрестности далее при всех $t^* \leqslant t \leqslant T$, где T — заданное число. Примеры В. И. Арнольда [52] и Е. А. Гребеникова и Ю. А. Рябова [17] указывают на то, что ε-близость медленных переменных $x(t, \mu)$ и $\bar{x}(t, \mu)$ на асимптотически большом промежутке времени $(t \in [0, O(\mu^{-1})])$ может и не иметь места, если не наложить достаточно жесткие условия на поведение решения $x(t, \mu)$ в окрестностях резонансных точек.

Для иллюстрации этого утверждения приведем формулировку теоремы В. И. Арнольда [52], установленной им для двухчастотной системы вида (90) $(n=2)$.

Теорема 1.5 (В. И. Арнольд). *Пусть*:

1) *вектор-функции* $X(x, y, \mu)$, $Y(x, y, \mu)$ *аналитичны и* 2π-*периодичны по* y *в области* $G_{m+n}=\{(x, y): x \in P_m, \|\mathrm{Im}\, y\| < \rho < 1\}$, P_m — *комплексная компактная* m-*мерная область*;

2) *частоты* $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ *аналитичны в области* P_m;

3) *нормы* $\|X(x, y, \mu)\|$, $\|Y(x, y, \mu)\|$ *ограничены в заданных областях*;

4) $$\left|\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}, X\right)\omega_2 - \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}, X\right)\omega_1\right| > 0 \tag{1.98}$$

при всех $(x, y) \in G_{m+n}$.

Тогда существует такое $\mu_0 \ll 1$, *что при всех* $\mu \in [0, \mu_0]$ *и всех* $t \in [0, \mu^{-1}]$ *справедлива оценка*

$$\|x(t, \mu) - \bar{x}(t, \mu)\| < C\sqrt{\mu}\ln^2(1/\mu), \tag{1.99}$$

где C — *некоторая положительная постоянная.*

Среди условий теоремы особое значение имеет неравенство (98). Именно это условие показывает, что решение $x(t, \mu)$ первоначальной системы (90) может пройти через окрестности резонансных точек радиуса $O(\sqrt{\mu})$ и не произойдет застревания в этих окрестностях, если оно там окажется (количественные оценки величин для радиусов окрестностей и времени их прохождения можно найти в [8, 52]). Некоторые обобщения теоремы В. И. Арнольда на случай $n>2$ касаются ослабления условия (98) и получены в работах [53, 54].

Качественные рассуждения, приведенные в этом параграфе, показывают, что для построения преобразований типа Крылова — Боголюбова, переводящих многомерные автономные вращательные системы (90) в системы сравнения

$$d\bar{x}/dt=\mu X_0(\bar{x},\ \mu),\quad d\bar{y}/dt=\omega(\bar{x})+\mu Y_0(\bar{x},\ \mu),\tag{1.100}$$

необходимо разработать такой аналитический аппарат, который учитывал бы возможность прохождения траекторий через резонансные точки или вблизи последних.

§ 1.10. Алгоритм усечения правых частей дифференциальных уравнений

Рассмотрим две вращательные системы $m+n$-го порядка

$$\begin{gathered} dx/dt=\mu X(x,\ y,\ \mu),\quad dy/dt=\omega(x)+\mu Y(x,\ y,\ \mu),\\ d\tilde{x}/dt=\mu X_N(\tilde{x},\ \tilde{y},\ \mu),\quad d\tilde{y}/dt=\omega(\tilde{x})+\mu Y_N(\tilde{x},\ \tilde{y},\ \mu) \end{gathered}\tag{1.101}$$

с начальными условиями

$$x(0,\ \mu)=\tilde{x}(0,\ \mu),\quad y(0,\ \mu)=\tilde{y}(0,\ \mu),\tag{1.102}$$

правые части которых определены в $G_{m+n}=\{(x,\ y):\ x\in P_m,\ y\in\in Q_n\}$.

Будем предполагать, что:

1) решение системы (90) с заданными начальными условиями существует и единственно;

2) функции X_N, Y_N, ω удовлетворяют в областях своего определения условию Липшица

$$\begin{gathered} \|X_N(x_1,\ y_1)-X_N(x_2,\ y_2)\|\leqslant L_x\|x_1-x_2\|+L_y\|y_1-y_2\|,\\ \|Y_N(x_1,\ y_1)-Y_N(x_2,\ y_2)\|\leqslant l_x\|x_1-x_2\|+l_y\|y_1-y_2\|,\\ \|\omega(x_1)-\omega(x_2)\|\leqslant L_\omega\|x_1-x_2\|; \end{gathered}\tag{1.103}$$

3) в области G_{m+n} имеют место неравенства

$$\|X(x,\ y)-X_N(x,\ y)\|\leqslant\varepsilon_1,\quad \|Y(x,\ y)-Y_N(x,\ y)\|\leqslant\varepsilon_2,\tag{1.104}$$

где ε_1, ε_2 — произвольные положительные числа.

Тогда имеют место следующие оценки [55] для решений систем (90) и (101):

$$\begin{gathered} \|y(t,\ \mu)-\tilde{y}(t,\ \mu)\|\leqslant C_1^{(x)}\exp\{\lambda_1 t\}+C_2^{(x)}\exp\{\lambda_2 t\}+\beta,\\ \|x(t,\ \mu)-\tilde{x}(t,\ \mu)\|\leqslant[L_\omega+\mu l_x]^{-1}\left[C_1^{(x)}\lambda_1\exp\{\lambda_1 t\}+\right.\\ \left.+C_2^{(x)}\lambda_2\exp\{\lambda_2 t\}-\mu l_y\|y(t,\ \mu)-\tilde{y}(t,\ \mu)\|-\mu\varepsilon_2\right], \end{gathered}\tag{1.105}$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\mu (L_x + l_y) \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\mu^2 (L_x + l_y)^2 - 4 (\mu^2 L_y l_x - \mu^2 L_x l_y - \mu L_y L_\omega)}\right], \quad (1.106)$$

$$\beta = \frac{\varepsilon_1 (L_\omega + \mu l_x) - \mu L_x \varepsilon_2}{\mu L_x l_y - L_y L_\omega - \mu L_y l_x},$$

$$C_1^{(x)} = \frac{\beta\lambda_2 + \mu\varepsilon_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2^{(x)} = -\beta - C_1^{(x)}.$$

Неравенства (105) могут быть использованы для решения обратной задачи. Пусть задан интервал времени $t \in [0, T]$, на котором выполняются неравенства (105). Пусть, кроме того, заданы отклонения

$$\|x - \tilde{x}\| \leqslant \delta_1, \quad \|y - \bar{y}\| \leqslant \delta_2. \quad (1.107)$$

Требуется найти оценки для норм

$$\|X(x, y, \mu) - X_N(x, y, \mu)\|, \quad \|Y(x, y, \mu) - Y_N(x, y, \mu)\|,$$

т. е. определить ε_1 и ε_2, входящие в (104).

Решение относительно ε_1 и ε_2 алгебраических уравнений

$$C_1^{(x)}\lambda_1 \exp\{\lambda_1 T\} + C_2^{(x)}\lambda_2 \exp\{\lambda_2 T\} - \mu\varepsilon_2 = \delta_1 (L_\omega + \mu l_x) + \mu l_y \delta_2,$$
$$(1.108)$$
$$C_1^{(x)} \exp\{\lambda_1 T\} + C_2^{(x)} \exp\{\lambda_2 T\} + \beta = \delta_2$$

дает выражения вида

$$\varepsilon_1 = A_1(\mu, T)\delta_1 + A_2(\mu, T)\delta_2, \quad \varepsilon_2 = B_1(\mu, T)\delta_1 + B_2(\mu, T)\delta_2, \quad (1.109)$$

где $A_k(\mu, T)$, $B_k(\mu, T)$, $k = 1, 2$,— некоторые функции достаточно громоздкой аналитической структуры. Можно, в частности, показать, что при достаточно малых μ и $T = O(\mu^{-1})$

$$A_k(\mu, T) = O(1), \quad B_k(\mu, T) = O(1). \quad (1.110)$$

Таким образом, по заданным величинам δ_1, δ_2, μ и T можно вычислить ε_1 и ε_2, а последние величины можно использовать для «усечения» бесконечных рядов в правых частях уравнений (90). Действительно, пусть функции $X(x, y)$, $Y(x, y)$ дифференцируемы l раз по y в области G_{m+n}, $l > n$. Тогда имеем оценку [55]

$$\left\| X(x, y) - \sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N} X_k(x) \exp\{i(k, y)\} \right\| <$$

$$< C(n, N) \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{l - n} C_l^{(i)} (N + 0,5)^{n-l}, \quad (1.111)$$

где

$$C(n, N) = \begin{cases} 2n^{l+1}, & \text{если } N \geqslant 1, \quad n \geqslant 1, \\ n^{l+2}/2^{n-2}, & \text{если } N \geqslant 2, \quad n \geqslant 1, \\ \dfrac{3n^l}{\sqrt{\pi(4n-3)}}\left(\dfrac{6N}{n-1}\right)^{n-1}, & \text{если } n \geqslant 2, \quad N \geqslant n-1, \end{cases}$$

$C_l^{(i)}$ — положительная постоянная, ограничивающая в области G_{m+n} следующую норму i-й компоненты $X^{(i)}$ вектор-функции $X(x, y)$:

$$\|X^{(i)}(x, y)\|_{\|\rho\|} = \max_{0 \leqslant \|\alpha\| \leqslant \|\rho\|} \sup_{(x, y) \in G_{m+n}} \left| \frac{\partial^{\|\alpha\|} X^{(i)}}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}} \right| \leqslant C_l^{(i)}. \quad (1.112)$$

Аналогичная оценка выписывается и для вектор-функции $Y(x, y)$. Если оценка вида (112) выполняется и для $X^{(i)}(x, y, \mu)$, то неравенство (111) имеет место и для вектор-функции $X(x, y, \mu)$ с той лишь разницей, что $C_l^{(i)} = C_l^{(i)}(\mu)$.

Далее составляем два не зависящих друг от друга неравенства:

$$\frac{C(n, N)(N+0{,}5)^{n-l}}{l-n} \sum_{i=1}^{m} C_l^{(i)} \leqslant \varepsilon_k, \qquad k = 1, 2, \qquad (1.113)$$

где ε_k вычисляются по формулам (109). Каждое из неравенств решается независимо и находится минимальное значение целого числа N, удовлетворяющее ему, а из двух минимальных значений N берется большее. Это и есть то значение N, по которому «усекаются» правые части уравнений (90).

Таким образом, алгоритм усечения правых частей дифференциальных уравнений вкратце состоит в следующем:

Шаг 1. По заданным отклонениям δ_1, δ_2 приближенного решения от точного решения первоначальной системы дифференциальных уравнений (90) и заданному асимптотическому промежутку времени $[0, T]$ по формулам (109) определяем величины ε_1, ε_2, характеризующие отклонения правых частей приближенных уравнений (101) от правых частей точных уравнений (90).

Шаг 2. Зная величины ε_1, ε_2, находим в результате решения неравенств (113) число N, указывающее на то место, где должны быть «усечены» ряды (91).

Теперь вместо вращательной системы (90) можно рассматривать систему

$$\frac{dx}{dt} = \mu X_N(x, y, \mu) \equiv \mu \sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N} X_k(x, \mu) \exp\{i(k, y)\},$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega(x) + \mu Y_N(x, y, \mu) \equiv \omega(x) + \mu \sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N} Y_k(x, \mu) \exp\{i(k, y)\}, \qquad (1.114)$$

$$x(0, \mu) = x_0, \quad y(0, \mu) = y_0,$$

правые части которых суть тригонометрические полиномы относительно y, а не бесконечные ряды.

Далее будем изучать систему (114).

§ 1.11. Практически нерезонансные автономные вращательные системы

Рассмотрим класс практически нерезонансных многочастотных вращательных систем и для них построим асимптотическую теорию возмущений на основе метода Крылова — Боголюбова. Предположим, что решение $x(t, \mu; x_0, y_0)$, $y(t, \mu; x_0, y_0)$ системы (114) таково, что для всех целочисленных векторов k, норма которых удовлетворяет неравенству

$$1 \leqslant \|k\| \leqslant N, \tag{1.115}$$

и для любого $t \in [0, T]$ (T — заданное положительное число) выполняется неравенство

$$|(k, \omega(x(t, \mu; x_0, y_0)))| > \alpha, \tag{1.116}$$

где α — заранее заданное (иногда уточняющееся в процессе построения асимптотических разложений) положительное число.

Будем называть в таком случае системы вида (114) практически нерезонансными системами. Согласно алгоритму построения приближенной системы (114), резонансные члены со свойством $|(k, \omega(x(t, \mu; x_0, y_0)))| \leqslant \alpha$ могут быть только среди тех членов, для которых $\|k\| > N$, т. е. среди «отброшенных» в правых частях дифференциальных уравнений слагаемых.

Применим теперь к (114) оператор усреднения по угловым переменным y:

$$\overline{X}_N(x, \mu) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} X_N(x, y, \mu)\, dy = X_0(x, \mu),$$

$$\overline{Y}_N(x, \mu) = Y_0(x, \mu).$$

Тогда система сравнения первого приближения для вращательной системы (114) запишется в виде

$$d\bar{x}/dt = \mu X_0(\bar{x}, \mu), \qquad d\bar{y}/dt = \omega(\bar{x}) + \mu Y_0(\bar{x}, \mu), \tag{1.117}$$

а система сравнения общего вида (любого приближения) может быть написана в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \mu X_0(\bar{x}, \beta) + \sum_{k \geqslant 2} \mu^k A_k(\bar{x}, \beta), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= \omega(\bar{x}) + \mu Y_0(\bar{x}, \beta) + \sum_{k \geqslant 2} \mu^k B_k(\bar{x}, \beta), \end{aligned} \tag{1.118}$$

где через β обозначен малый параметр μ, входящий в качестве аргумента в функции $X_N(x, y, \mu)$, $Y_N(x, y, \mu)$. Вектор-функции A_k, B_k, как и раньше, пока неизвестны.

Системы сравнения (117) и (118) имеют одно характерное свойство. Оператор усреднения по фазовым переменным y приводит к «разделению движений», т. е. к расщеплению системы дифференциальных уравнений $m+n$-го порядка на две подсистемы, интегрирование которых может быть выполнено независимо. Одна подсистема, определяющая медленные «усредненные» переменные $\bar{x}$, имеет порядок m, вторая, определяющая $\bar{y}$, имеет порядок n.

Если подсистема первого приближения для $\bar{x}$

$$d\bar{x}/dt = \mu X_0(\bar{x}, \mu) \tag{1.119}$$

может быть проинтегрирована, то нахождение быстрых переменных $\bar{y}$ сводится к простой квадратуре

$$\bar{y}(t, \mu) = \int_0^t [\omega(\bar{x}(\tau, \mu)) + \mu Y_0(\bar{x}(\tau, \mu))]\, d\tau + y(0, \mu). \tag{1.120}$$

Остается неясным, какое отношение имеют функции $\bar{x}(t, \mu)$, $\bar{y}(t, \mu)$ к решению $x(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ вращательной системы (114). Чтобы ответить на этот вопрос, следует построить асимптотические представления для x и y, пользуясь методом усреднения. Будем искать такую замену переменных

$$\begin{aligned} x(t, \mu, \beta) &= \bar{x}(t, \mu, \beta) + \sum_{k\geqslant 1} \mu^k u_k(\bar{x}, \bar{y}, \beta), \\ y(t, \mu, \beta) &= \bar{y}(t, \mu, \beta) + \sum_{k\geqslant 1} \mu^k v_k(\bar{x}, \bar{y}, \beta), \end{aligned} \tag{1.121}$$

которая преобразовывает систему (114) с аналитическими относительно x, y в области G_{m+n} правыми частями в систему сравнения (118). Из аналитической структуры преобразования Крылова — Боголюбова (121) следует, что замена переменных $(x, y)\to(\bar{x}, \bar{y})$ не выражается классическими степенными рядами по степеням μ, так как она содержит еще и зависимость от параметра β.

После дифференцирования замены (121) и выполнения соответствующих выкладок получаем бесконечномерную систему линейных уравнений в частных производных:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) = X_N(\bar{x}, \bar{y}, \beta) - X_0(\bar{x}, \beta), \tag{1.122}$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) = Y_N(\bar{x}, \bar{y}, \beta) - Y_0(\bar{x}, \beta) + \left(\frac{\partial \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, u_1\right), \tag{1.123}$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) = \left(\frac{\partial X_N(\bar{x}, \bar{y}, \beta)}{\partial \bar{x}}, u_1\right) + \left(\frac{\partial X_N(\bar{x}, \bar{y}, \beta)}{\partial \bar{y}}, v_1\right) - \\ - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}}, X_0(\bar{x}, \beta)\right) - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}, Y_0(\bar{x}, \beta)\right) - A_2(\bar{x}, \beta), \quad (1.124)$$

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) = \left(\frac{\partial Y_N(\bar{x}, \bar{y}, \beta)}{\partial \bar{x}}, u_1\right) + \left(\frac{\partial Y_N(\bar{x}, \bar{y}, \beta)}{\partial \bar{y}}, v_1\right) + \\ + \left(\frac{\partial \omega(x)}{\partial \bar{x}}, u_2\right) + \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{\partial^2 \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2}, u_1\right), u_1\right) - \left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{x}}, X_0(\bar{x}, \beta)\right)\Bigg) - \\ - \left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}, Y_0(\bar{x}, \beta)\right) - B_2(\bar{x}, \beta), \quad (1.125)$$

. . . .

$$\left(\frac{\partial u_s}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) = U_s(\bar{x}, \bar{y}, \beta; u_1, \ldots, u_{s-1}, v_{s-1}; A_2, B_2, \ldots, A_s), \quad (1.126)$$

$$\left(\frac{\partial v_s}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) = V_s(\bar{x}, \bar{y}, \beta; u_1, \ldots, u_{s-1}, u_s; A_2, B_2, \ldots, A_s, B_s), \quad (1.127)$$

. . . .

Бесконечная система (122) — (127) обладает тем замечательным свойством, что она последовательно (до любого значения индекса s) может быть проинтегрирована в аналитическом виде. Действительно, подставляя в (122) выражение для $X_N(\bar{x}, \bar{y}, \beta)$, будем иметь для u_1 уравнение

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) = \sum_{1 \leq \|k\| \leq N} X_k(\bar{x}, \beta) \exp\{i(k, \bar{y})\}, \quad (1.128)$$

общее решение которого может быть записано в виде

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}, \beta) = \sum_{1 \leq \|k\| \leq N} \frac{1}{i(k, \omega(\bar{x}))} X_k(\bar{x}, \beta) \exp\{i(k, \bar{y})\} + \varphi_1(\bar{x}, \beta), \quad (1.129)$$

где $\varphi_1(\bar{x}, \beta)$ — произвольная дифференцируемая по $\bar{x}$ вектор-функция. Норма индекса суммирования k не превышает N, поэтому знаменатели $(k, \omega(\bar{x}))$ в выражении (129) при $t \in [0, T]$ не обращаются в нуль.

На практике целесообразно положить $\varphi_1(\bar{x}, \beta) \equiv 0$, т. е. определять $u_1(\bar{x}, \bar{y}, \beta)$ по формуле

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}, \beta) = \sum_{1 \leq \|k\| \leq N} \frac{1}{i(k, \omega(\bar{x}))} X_k(\bar{x}, \beta) \exp\{i(k, \bar{y})\}. \quad (1.130)$$

Если мы хотим построить асимптотическую теорию в тригонометрической форме, то условие

$$\varphi_1(\bar{x}, \beta) \equiv 0 \tag{1.131}$$

является необходимым. В противном случае уже при определении функции $v_1(\bar{x}, \bar{y}, \beta)$ в её выражении появился бы «вековой» член вида

$$((\partial\omega(\bar{x})/\partial\bar{x}, \varphi_1(\bar{x}, \beta)), \bar{y}), \tag{1.132}$$

«пропорциональный» быстрому вектору $\bar{y}$, который в свою очередь является почти линейной функцией времени t.

Далее, имея выражение (130), можно проинтегрировать уравнение (123). С учетом равенства (131) одно из его решений может быть написано в виде

$$v_1(\bar{x}, \bar{y}, \beta) = \sum_{1 \leqslant \|k\| \leqslant N} \frac{1}{i(k, \omega(\bar{x}))} Y_k(\bar{x}, \beta) \exp\{i(k, \bar{y})\} +$$
$$+ \left(\frac{\partial\omega(\bar{x})}{\partial\bar{x}}, \sum_{1 \leqslant \|k\| \leqslant N} \frac{1}{i^2 (k, \omega(\bar{x}))^2} X_k(\bar{x}, \beta) \exp\{i(k, \bar{y})\}\right). \tag{1.133}$$

Из бесконечного числа решений уравнения (123) мы выбрали именно такое решение, которое является 2π-периодической функцией относительно вектора $\bar{y}$. Если бы мы добавили к правой части выражения (133) произвольную дифференцируемую функцию $\psi_1(\bar{x}, \beta)$, то такое выражение также было бы решением уравнения (123), однако оно обусловило бы появление вековых членов в функции $u_2(\bar{x}, \bar{y}, \beta)$.

Рассмотрим теперь второе приближение, т. е. определим функции $u_2(\bar{x}, \bar{y}, \beta)$ и $v_2(\bar{x}, \bar{y}, \beta)$. Пользуясь общим видом уравнений для u_k, v_k, можно написать

$$\begin{aligned} (\partial u_2/\partial\bar{y}, \omega(\bar{x})) &= U_2(\bar{x}, \bar{y}, \beta; u_1, v_1, A_2), \\ (\partial v_2/\partial\bar{y}, \omega(\bar{x})) &= V_2(\bar{x}, \bar{y}, \beta; u_1, v_1, u_2, B_2), \end{aligned} \tag{1.134}$$

где

$$U_2 = \left(\sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N} \frac{\partial X_k(x, \beta)}{\partial\bar{x}} \exp\{i(k, \bar{y})\}, u_1\right) +$$
$$+ i \sum_{1 \leqslant \|k\| \leqslant N} X_k(\bar{x}, \beta) \exp\{i(k, \bar{y})\}(k, v_1) -$$
$$- \left(\frac{\partial u_1}{\partial\bar{x}}, X_0(\bar{x}, \beta)\right) - \left(\frac{\partial u_1}{\partial\bar{y}}, Y_0(\bar{x}, \beta)\right) - A_2(\bar{x}, \beta), \tag{1.135}$$

$$V_2 = \left(\sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N} \frac{\partial Y_k(\bar{x}, \beta)}{\partial \bar{x}} \exp\{i(k, \bar{y})\}, u_1 \right) + \\ + i \sum_{1 \leqslant \|k\| \leqslant N} Y_k(\bar{x}, \beta) \exp\{i(k, \bar{y})\}(k, v_1) + \\ + \left(\frac{\partial \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, u_2 \right) + \frac{1}{2!} \left(\left(\frac{\partial^2 \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2}, u_1 \right), u_1 \right) - \left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{x}}, X_0(\bar{x}, \beta) \right) - \\ - \left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}, Y_0(\bar{x}, \beta) \right) - B_2(\bar{x}, \beta). \quad (1.136)$$

Выбор вектор-функций A_2, B_2, входящих в структуру уравнений (118) и (134), может быть сделан по-разному, но наиболее подходящим является тот, при котором в функциях u_2, v_2 можно исключить наиболее быстро растущие слагаемые, например непериодические слагаемые. Иными словами, функции A_2, B_2 следует выбрать таким образом, чтобы

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} U_2 d\bar{y}_1 \ldots d\bar{y}_n = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V_2 d\bar{y}_1 \ldots d\bar{y}_n = 0, \quad (1.137)$$

или в явном виде

$$A_2(\bar{x}, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left[\left(\sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N} \frac{\partial X_k(\bar{x}, \beta)}{\partial \bar{x}} \exp\{i(k, \bar{y})\}, u_1 \right) + \\ + i \sum_{1 \leqslant \|k\| \leqslant N} X_k(\bar{x}, \beta) \exp\{i(k, \bar{y})\}(k, v_1) - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}}, X_0(\bar{x}, \beta) \right) - \\ - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}, Y_0(\bar{x}, \beta) \right) \right] d\bar{y}_1 \ldots d\bar{y}_n, \quad (1.138)$$

$$B_2(\bar{x}, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left[\left(\sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N} \frac{\partial Y_k(\bar{x}, \beta)}{\partial \bar{x}} \exp\{i(k, \bar{y})\}, u_1 \right) + \\ + i \sum_{1 \leqslant \|k\| \leqslant N} Y_k(\bar{x}, \beta) \exp\{i(k, \bar{y})\}(k, v_1) + \left(\frac{\partial \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, u_2 \right) + \\ + \frac{1}{2!} \left(\left(\frac{\partial^2 \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2}, u_1 \right), u_1 \right) - \left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{x}}, X_0(\bar{x}, \beta) \right) - \\ - \left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}, Y_0(\bar{x}, \beta) \right) \right] d\bar{y}_1 \ldots d\bar{y}_n. \quad (1.139)$$

Для вычисления A_2 необходимо подставить в подынтегральное выражение (138) явные функциональные зависимости для u_1, v_1 с помощью формул (130), (133) и их частные производные. После нахождения $A_2(\bar{x}, \beta)$ можно проинтегрировать первое из уравнений (134) и таким образом найти функцию u_2 (суммирование ведется по всем k, r: $1 \leqslant \|k\| \leqslant N$, $1 \leqslant \|r\| \leqslant N$, $k + r \neq 0$):

$$u_2(\bar{x}, \bar{y}, \beta) =$$

$$= \sum_{k,r} \left(X_k, \frac{\partial X_r}{\partial \bar{x}} \right) \exp\{i(k + r, \bar{y})\} [i^2 (k, \omega(\bar{x}))\ k + r, \omega(\bar{x}))]^{-1} +$$

$$+ \sum_{k,r} X_k(k, Y_r) \exp\{i(k + r, \bar{y})\} [i^2 (r, \omega(\bar{x}))(k + r, \omega(\bar{x}))]^{-1} +$$

$$+ \sum_{k,r} X_k \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}}, k, \right) X_r \right) \exp\{i(k + r, \bar{y})\} [i^2 (r, \omega(\bar{x}))^2 (k + r, \omega(\bar{x}))]^{-1} -$$

$$- \sum_{k} \left(\frac{\partial X_k}{\partial \bar{x}} \exp\{i(k, \bar{y})\} [i^2 (k, \omega(\bar{x}))^2]^{-1}, X_0(\bar{x}, \beta) \right) -$$

$$- \sum_{k} X_k(\bar{x}, \beta) \exp\{i(k, y)\} [i^2 (k, \omega(\bar{x}))^2]^{-1} [k, Y_0(\bar{x}, \beta)). \qquad (1.140)$$

Далее, подставляя u_1, v_1, u_2 в равенство (139), находим функцию B_2 и, интегрируя второе из уравнений (134), находим v_2. Выражение для $v_2(\bar{x}, \bar{y}, \beta)$ аналогично, но более громоздко, чем (140), поэтому мы здесь его не приводим.

Любой другой выбор функций $A_2(\bar{x}, \beta)$, $B_2(\bar{x}, \beta)$ менее удачен, так как в этих случаях в уравнениях для u_2, v_2 могут появиться непериодические слагаемые, которые при интегрировании порождают вековые возмущения, т. е. члены вида $(\varphi(\bar{x}, \beta), \bar{y})$.

Таким образом, выражения (130), (133), (140) показывают, что функции u_1, v_1, u_2, v_2, составляющие преобразование Крылова — Боголюбова с точностью до $O(\mu^2)$, выражаются через 2π-периодические функции относительно быстрых переменных $\bar{y}$. Это свойство сохраняется для любого порядка k, если определять функции A_k, B_k из равенств

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} U_k(\bar{x}, \bar{y}, \beta; u_1, \ldots, v_{k-1}; A_2, B_2, \ldots, A_k)\, d\bar{y}_1 \ldots d\bar{y}_n = 0, \qquad (1.141)$$

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V_k(\bar{x}, \bar{y}, \beta; u_1, \ldots, v_{k-1}, u_k; A_2, B_2, \ldots, A_k, B_k)\, d\bar{y}_1 \ldots d\bar{y}_n = 0 \qquad (1.142)$$

и на каждом шаге итерации (т. е. при определении функций $u_s(\bar{x}, \bar{y}, \beta)$, $v_s(\bar{x}, \bar{y}, \beta)$, $s < k$) произвольные функции вида $\varphi_s(\bar{x}, \beta)$, $\psi_s(\bar{x}, \beta)$ полагать равными нулю, аналогично (131).

Мы описали алгоритм нахождения функций u_s, v_s в виде 2π-периодических функций относительно $\bar{y}$. Преобразование Крылова — Боголюбова (121) имеет «тригонометрическую форму», и в нем отсутствуют вековые члены вида $(\varphi(\bar{x}, \beta), \bar{y})$.

Достаточно на каком-либо s-м итерационном шаге ввести ненулевую функцию $\varphi_s(\bar{x}, \beta)$ или определить $A_s(\bar{x}, \beta)$, $B_s(\bar{x}, \beta)$ не по формулам (141), (142), как это уже на $s+1$-м шаге приводит к появлению вековых членов вида $(\varphi_s(\bar{x}, \beta), \bar{y})$ в функциях u_{s+1}, v_{s+1}. Это означает, что возмущения $s+1$-го порядка уже не будут чисто тригонометрическими.

Изучим связь между начальными условиями. Из выражения (130) для u_1 вытекает, что при $t=0$ имеем

$$u_1(\bar{x}(0, \beta), \bar{y}(0, \beta), \beta) = \\ = \sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N} X_k(\bar{x}(0, \beta), \beta)\exp\{i(k, \bar{y}(0, \beta))\}[i(k, \omega(\bar{x}(0, \beta)))]^{-1} \neq 0. \tag{1.143}$$

По этой причине в первом приближении вектор $x(0, \mu, \beta) - \bar{x}(0, \mu, \beta)$ не равен нулевому вектору, а его норма имеет порядок $O(\mu)$, так как

$$x(0, \mu, \beta) - \bar{x}(0, \mu, \beta) = \mu u_1(\bar{x}(0, \mu, \beta), \bar{y}(0, \mu, \beta), \beta). \tag{1.144}$$

Порядок $O(\mu)$ сохраняется и в s-м приближении. Те же оценки имеют место и для вектора $y(0, \mu, \beta) - \bar{y}(0, \mu, \beta)$.

Таким образом, нахождение преобразования Крылова — Боголюбова в тригонометрической форме (в виде периодических функций относительно $\bar{y}$) возможно, если искать решение системы сравнения (118) с начальными условиями $\bar{x}(0, \mu, \beta) \neq x(0, \mu, \beta)$, $\bar{y}(0, \mu, \beta) \neq y(0, \mu, \beta)$.

Как определить начальные значения $\bar{x}(0, \mu, \beta)$, $\bar{y}(0, \mu, \beta)$? Очевидно, они должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} &\bar{x}(0, \mu, \beta) + \sum_{k\geqslant 1} \mu^k u_k(\bar{x}(0, \mu, \beta), \bar{y}(0, \mu, \beta), \beta) = x(0, \mu, \beta) \equiv x_0, \\ &\bar{y}(0, \mu, \beta) + \sum_{k\geqslant 1} \mu^k v_k(\bar{x}(0, \mu, \beta), \bar{y}(0, \mu, \beta), \beta) = y(0, \mu, \beta) \equiv y_0, \end{aligned} \tag{1.145}$$

которые должны быть решены с заданной степенью точности.

В заключение опишем схему алгоритма. Точное решение усеченной нелинейной системы (114), как правило, не представляется возможным построить в аналитическом виде, поэтому вместо нее вводим систему сравнения s-го порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \mu X_0(\bar{x}, \beta) + \sum_{k=2}^{s} \mu^k A_k(\bar{x}, \beta), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= \omega(\bar{x}) + \mu Y_0(\bar{x}, \beta) + \sum_{k=2}^{s} \mu^k B_k(\bar{x}, \beta), \end{aligned} \tag{1.146}$$

в которой произведено «разделение движений».

Для преобразования (114) в систему (146) используется усеченное преобразование Крылова — Боголюбова

$$
\begin{aligned}
x(t, \mu, \beta) &= \bar{x}(t, \mu, \beta) + \sum_{k=1}^{s} \mu^k u_k(\bar{x}, \bar{y}, \beta), \\
y(t, \mu, \beta) &= \bar{y}(t, \mu, \beta) + \sum_{k=1}^{s} \mu^k v_k(\bar{x}, \bar{y}, \beta).
\end{aligned} \tag{1.147}
$$

Если для определения функций u_k, v_k применяется вышеописанный алгоритм, то мы строим преобразование Крылова — Боголюбова в виде 2π-периодических функций от $\bar{y}$. Выражения для u_k, v_k выписываются последовательно в аналитическом виде (см. (130), (133), (140)).

В аналитическом виде выписываются также выражения для $A_k(\bar{x}, \beta)$, $B_k(\bar{x}, \beta)$ $(k = 2, \ldots, s)$, т. е. правые части уравнений сравнения (146) можно написать однозначно.

Если теперь рассматривать формулы (147) как асимптотические представления первоначальных искомых переменных $x(t, \mu, \beta)$, $y(t, \mu, \beta)$, то нам необходимо знать решение системы сравнения (146) $\bar{x}(t, \mu, \beta)$, $\bar{y}(t, \mu, \beta)$. Сначала найдем начальные значения $\bar{x}(0, \mu, \beta)$, $\bar{y}(0, \mu, \beta)$ из функциональных уравнений

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(0, \mu, \beta) + \sum_{k=1}^{s} \mu^k u_k(\bar{x}(0, \mu, \beta), \bar{y}(0, \mu, \beta), \beta) &= x_0, \\
\bar{y}(0, \mu, \beta) + \sum_{k=1}^{s} \mu^k v_k(\bar{x}(0, \mu, \beta), \bar{y}(0, \mu, \beta), \beta) &= y_0.
\end{aligned} \tag{1.148}
$$

Формулы (148) в отличие от (145) определяют начальные значения только для s-го приближения.

Остается теперь найти решение задачи Коши для подсистемы

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{x}}{dt} &= \mu X_0(\bar{x}, \beta) + \sum_{k=2}^{s} \mu^k A_k(\bar{x}, \beta), \\
\bar{x}(t, \mu, \beta)\big|_{t=0} &= \bar{x}(0, \mu, \beta).
\end{aligned} \tag{1.149}
$$

Если оно найдено, то быстрые переменные $\bar{y}(t, \mu, \beta)$ определяются из квадратуры

$$
\bar{y}(t, \mu, \beta) = \bar{y}(0, \mu, \beta) + \int_0^t [\omega(\bar{x}(\tau, \mu, \beta)) + \mu Y_0(\bar{x}(\tau, \mu, \beta), \beta) + \\
+ \sum_{k=2}^{s} \mu^k B_k(\bar{x}(\tau, \mu, \beta), \beta)]\, d\tau. \tag{1.150}
$$

Подставляя теперь функции $\bar{x}$, $\bar{y}$ в формулы (147), мы находим решение системы (114) $x(t, \mu, \beta)$, $y(t, \mu, \beta)$ с асимптотикой $O(\mu^s)$. В окончательных асимптотических формулах (147) следует вместо β написать μ.

§ 1.12. Сильно возмущенные системы

Более общий класс дифференциальных уравнений составляют системы вида

$$\begin{aligned} dx/dt &= \mu X(x, y, z, t, \mu), \\ dy/dt &= \omega(x, y, z, t, \mu) + \mu Y(x, y, z, t, \mu), \\ dz/dt &= \Omega(x, y, z, t, \mu) + \mu Z(x, y, z, t, \mu), \end{aligned} \tag{1.151}$$

где $x=(x_1, \ldots, x_m)$ — m-мерный вектор медленных позиционных переменных, $z=(z_1, \ldots, z_s)$ — s-мерный вектор медленных угловых переменных, $y=(y_1, \ldots, y_n)$ — n-мерный вектор быстрых угловых переменных, μ — малый скалярный параметр; вектор-функции X, Y, Z определены в некоторой области $G_{m+n+s+2}$, 2π-периодичны по угловым переменным y, z, T-периодичны по t и не имеют особенности при $\mu=0$; Ω, ω — частоты системы, также определенные в $G_{m+n+s+2}$, причем будем предполагать, что

$$\begin{aligned} &\|\omega\|\big|_{\mu=0} \neq 0, \quad \|\Omega\|\big|_{\mu=0} = 0, \\ &\left(\mu^{-\alpha}\|\Omega\|\right)\big|_{\mu=0} = O(1), \qquad 0<\alpha<1. \end{aligned} \tag{1.152}$$

Эти нормы, как и раньше, можно вычислять по разным формулам; в частности, можно считать, что

$$\|\omega(x, y, z, t, \mu)\| = \sum_{j=1}^{n} |\omega_j(x, y, z, t, \mu)|,$$

т. е. ввести некоторую норму как функцию координат x, y, z, t, μ.

В области $G_{m+n+s+2}$ вектор-функции X, Y, Z могут быть представлены разложениями

$$\begin{aligned} X(x, y, z, t, \mu) &= \sum_{\|k\|+|k_0|\geqslant 0} X_{k,k_0}(x, \mu) \exp\left\{i(k, w) + \frac{i2\pi k_0 t}{T}\right\}, \\ Y(x, y, z, t, \mu) &= \sum_{\|k\|+|k_0|\geqslant 0} Y_{k,k_0}(x, \mu) \exp\left\{i(k, w) + \frac{i2\pi k_0 t}{T}\right\}, \\ Z(x, y, z, t, \mu) &= \sum_{\|k\|+|k_0|\geqslant 0} Z_{k,k_0}(x, \mu) \exp\left\{i(k, w) + \frac{i2\pi k_0 t}{T}\right\}; \end{aligned} \tag{1.153}$$

здесь k есть $n+s$-мерный целочисленный индекс-вектор суммирования с компонентами $k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}, \ldots, k_{n+s}$; k_0 — скалярный целочисленный индекс; w есть $n+s$-мерный вектор угловых переменных с компонентами $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_s$. Норма вектора k, как и раньше, вычисляется по формуле

$$\|k\| = \sum_{r=1}^{n+s} |k_r|. \tag{1.154}$$

Важные для практики задачи описываются, как правило, неинтегрируемыми уравнениями типа (151), поэтому для построения приемлемых приближенных решений применяются разнообразные, хорошо известные методы теории возмущений. Класс интегрируемых уравнений типа (151) очень узок, и обычно они описывают модели, далекие от сложных реальных физических, механических и других систем.

При $\mu = 0$ система (151) приводится к порождающей системе

$$dx^{(0)}/dt = 0, \quad dy^{(0)}/dt = \omega(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}, t, 0), \qquad dz^{(0)}/dt = 0, \tag{1.155}$$

общее решение которой имеет вид

$$x^{(0)} = \text{const} = c, \quad y^{(0)} = \varphi(t, C), \quad z^{(0)} = \text{const} = C^*. \tag{1.156}$$

Для частных решений будем пользоваться обозначениями $x^{(0)} = x_0^{(0)}$, $y^{(0)} = \varphi(t, C_0)$, $z^{(0)} = z_0^{(0)}$.

Из (156) видно, что поведение угловых переменных $z^{(0)}$ и $y^{(0)}$ в невозмущенной задаче различно. Вектор $z^{(0)}$ является постоянным, а вектор $y^{(0)}$ — функцией времени, и это различие играет большую роль в исследованиях. Этим мы и объясняем раздельную запись дифференциальных уравнений для векторов y и z в возмущенной системе (151), хотя и тот и другой имеют смысл углов.

Приведем некоторые определения, весьма полезные при исследовании систем дифференциальных уравнений (151). Назовем положительное число [57]

$$T_\omega = 2\pi n/\|\omega\| \tag{1.157}$$

основным периодом системы (151), а положительное число

$$T_\Omega = 2\pi s/\|\Omega\| \tag{1.158}$$

ее *большим* (или *долгим*) *периодом*. Для определенности можно считать, что точка (x, y, z, t, μ) фиксирована, и тогда периоды T_ω и T_Ω являются функциями этой точки. Если нормы $\|\omega\|$ и $\|\Omega\|$ не равны нулю, то основной и долгий периоды T_ω и T_Ω являются положительными числами.

В силу условий (152) имеем, что

$$T_\Omega = O(\mu^{-\alpha}), \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{1.159}$$

Точно так же можно заключить, что

$$T_\Omega/T_\omega = O(\mu^{-\alpha}), \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{1.160}$$

Обычно в теории нелинейных колебаний исследователи стремятся изучить поведение решений системы (151) на асимптотически большом промежутке времени $[0, O(\mu^{-1})]$ или по меньшей мере на отрезке $[0, T_\Omega]$.

Обозначим через $\{x^{(1)}(t, \mu), y^{(1)}(t, \mu), z^{(1)}(t, \mu)\}$ первое приближение к решению системы (151), полученное методом последовательных приближений или каким-либо из методов теории возмущений.

В первом случае оно определяется системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx^{(1)}/dt &= \mu X(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, \mu), \\ dy^{(1)}/dt &= \omega(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, \mu) + \mu Y(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, \mu), \\ dz^{(1)}/dt &= \Omega(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, \mu) + \mu Z(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, \mu). \end{aligned} \tag{1.161}$$

В теориях возмущений, использующих классические разложения по степеням малого параметра μ, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= \mu X\left(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, 0\right), \\ \frac{dy^{(1)}}{dt} &= \mu\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\left(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, 0\right), x^{(1)}\right) + \\ &\quad + \mu\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\left(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, 0\right), y^{(1)}\right) + \\ &\quad + \mu\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\left(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, 0\right), z^{(1)}\right) + \\ &\quad + \mu\frac{\partial\omega}{\partial\mu}\left(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, 0\right) + \mu Y\left(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, 0\right), \\ \frac{dz^{(1)}}{dt} &= \mu\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\left(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, 0\right), x^{(1)}\right) + \\ &\quad + \mu\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\left(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, 0\right), y^{(1)}\right) + \\ &\quad + \mu\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\left(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, 0\right), z^{(1)}\right) + \\ &\quad + \mu\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\left(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, 0\right) + \mu Z\left(x^{(0)}, \varphi(t, C_0), z^{(0)}, t, 0\right). \end{aligned} \tag{1.162}$$

Важно отметить два обстоятельства.

1. Медленные переменные (и позиционные $x^{(1)}$, и угловые $z^{(1)}$), определяемые уравнениями (161) и (162), различаются на величину $O(\mu^2)$, что не имеет места для быстрых угловых переменных $y^{(1)}$.

2. Уравнения (162) для угловых переменных $y^{(1)}$, $z^{(1)}$ могут содержать, вообще говоря, члены, пропорциональные μ^α $(0 < \alpha \neq \neq 1)$, которые обозначены через $\mu\partial\omega/\partial\mu$ и $\mu\partial\Omega/\partial\mu$. Поэтому,

строго говоря, может оказаться, что $y^{(1)}$ и $z^{(1)}$ не являются функциями, пропорциональными μ, но ради некоторого удобства будем считать, что они входят в структуру именно первого приближения. К тому же ясно, что если частоты ω и Ω не зависят от малого параметра μ, то $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$ пропорциональны μ.

Система дифференциальных уравнений (161) называется *сильно возмущенной* [57], если

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_\Omega} \left\{ \left\| x^{(1)}(t, \mu) - x^{(0)} \right\| + \left\| z^{(1)}(t, \mu) - z^{(0)} \right\| \right\} \geqslant A, \qquad (1.163)$$

где A — некоторая (положительная) постоянная.

Соответствующую механическую задачу также будем называть сильно возмущенной. Аналогично можно определить слабо возмущенную задачу как задачу, для которой

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_\Omega} \left\{ \left\| x^{(1)}(t, \mu) - x^{(0)} \right\| + \left\| z^{(1)}(t, \mu) - z^{(0)} \right\| \right\} = O\left(\mu^\alpha\right), \quad \alpha > 0. \qquad (1.164)$$

Замечание. Если система (151) не содержит медленных угловых переменных z, то будем считать, что она является сильно возмущенной, если

$$\sup_{t\in[0,\mu^{-1}]} \left\| x^{(1)}(t, \mu) - x^{(0)} \right\| \geqslant A, \qquad (1.165)$$

и слабо возмущенной, если

$$\sup_{t\in[0,\mu^{-1}]} \left\| x^{(1)}(t, \mu) - x^{(0)} \right\| = O\left(\mu^\alpha\right), \quad \alpha > 0. \qquad (1.166)$$

Аналогично будем считать соответствующую первоначальную систему (151) сильно или слабо возмущенной, если соответствующая система (161) или (162) является сильно или слабо возмущенной.

Наиболее сложные и потому наиболее интересные сильно возмущенные задачи возникают там, где проявляется одна из следующих причин:

1) в системе (151) имеются резонансные явления, обусловленные резонансными соотношениями между основными частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$;

2) нормы вектор-функций μX, μY, μZ достаточно велики при малых значениях μ;

3) совместно действуют оба эти «механизма».

Если вектор-функции X, Y, Z аналитичны по μ, то можно искать решение системы (151) в виде классических разложений, в которых k-е члены строго пропорциональны μ^k:

$$x(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k(t), \quad y(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(t),$$
$$z(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(t). \qquad (1.167)$$

Заметим, что первые члены рядов (167) $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ не зависят от μ и совпадают с порождающим решением (155).

Исследования Пуанкаре [12] показали, что ряды вида (167), хотя и расходятся, тем не менее весьма полезны в небесной механике, так как они также являются асимптотическими. Именно асимптотический характер рядов (167) дает возможность строить хорошие приближенные решения уравнений (151), если они описывают слабо возмущенную задачу. В случае сильно возмущенных задач проявляется основной дефект асимптотических рядов (167), заключающийся в том, что они никак не учитывают особенности самих задач. В порождающем решении (155) отсутствует в каком-либо виде «эффект больших возмущений», поэтому оно плохо описывает сильно возмущенную задачу. Иными словами, возмущения порождающего решения будут содержать члены с малыми знаменателями.

Здесь мы встречаемся с ситуацией, типичной для любых итерационных методов. Какими бы хорошими с математической точки зрения ни были итерационные методы, их практическая эффективность зачастую определяется выбором нулевого приближения. При хорошем выборе нулевого приближения можно быстро получить желаемый результат, при плохом выборе можно прийти даже к абсурдному результату.

Эффективное решение сильно возмущенных задач следует искать только на пути применения к правым частям метода сглаживания таким образом, чтобы в уравнениях 1-го приближения присутствовали в обязательном порядке те слагаемые правых частей, из-за которых задача является сильно возмущенной. В качестве оператора сглаживания целесообразнее всего в таких случаях использовать оператор усреднения по быстрым переменным y и t (см. (14))

$$\overline{X}(x, z, \mu) = \frac{1}{(2\pi)^n T} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \int_0^T X(x, y, z, t, \mu)\, dy\, dt, \qquad (1.168)$$

т. е. процедуру усреднения следует выполнять по быстрым угловым переменным $y_1, \ldots, y_n$ и по времени t, которое тоже может быть интерпретировано как быстрая переменная. Более эффективным может оказаться усреднение вдоль порождающего решения по формуле

$$\overline{X}(x, z, \mu) = \lim_{T_1 \to \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} X(x, \varphi(t, C), z, t, \mu)\, dt, \qquad (1.169)$$

так как такая процедура сохраняет в X возможные резонансные члены, для которых выполняется равенство

$$(k, \omega) + 2\pi k_0/T = 0. \qquad (1.170)$$

Если к правым частям системы (151) применен оператор усреднения (168), то усредненная система первого приближения для (151) принимает вид

$$d\bar{x}/dt = \mu\bar{X}(\bar{x}, \bar{z}, \mu), \qquad d\bar{y}/dt = \omega(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t, \mu) + \mu\bar{Y}(\bar{x}, \bar{z}, \mu),$$
$$d\bar{z}/dt = \Omega(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t, \mu) + \mu\bar{Z}(\bar{x}, \bar{z}, \mu). \tag{1.171}$$

Легко можно выписать и усредненную систему любого приближения для первоначальной системы (151), которая представляется равенствами

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \mu\bar{X}(\bar{x}, \bar{z}, \mu) + \sum_{k\geqslant 2} \mu^k A_k(\bar{x}, \bar{z}),$$
$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \omega(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t, \mu) + \mu\bar{Y}(\bar{x}, \bar{z}, \mu) + \sum_{k\geqslant 2} \mu^k B_k(\bar{x}, \bar{z}), \tag{1.172}$$
$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \Omega(\bar{x}, \bar{y}, z, t, \mu) + \mu\bar{Z}(\bar{x}, \bar{z}, \mu) + \sum_{k\geqslant 2} \mu^k C_k(\bar{x}, \bar{z})$$

и которая, как и система (171), не расщепляется на отдельные подсистемы.

Вообще разделение движений, т. е. расщепление системы на две или большее число подсистем, возможно тогда, когда частоты ω и Ω не зависят от угловых переменных (именно такими системами являются вращательные, рассмотренные в § 1.9). После построения усредненных уравнений первого или любого приближения (171), (172) можно в принципе к (151) применять метод преобразований Крылова — Боголюбова, изложенный в предыдущих параграфах. Здесь мы не будем в явном виде выписывать уравнение Крылова — Боголюбова (4) для преобразований (151)$\to$(171) и (151)$\to$(172), поскольку в следующей главе этому вопросу будет уделено достаточно много внимания.

Замечание 1. Если при изучении сильно возмущенных систем вида (151) применяется оператор усреднения по части угловых переменных (оператор (14)), то весьма существенным является то, по каким угловым переменным производится усреднение. Рекомендуется обязательно усреднять в таких случаях в первую очередь по быстрым угловым переменным y, но не рекомендуется усреднять по медленным угловым переменным z. Следует сохранить зависимость интегрального среднего от z; в противном случае не приходится ожидать, что медленные переменные $x(t, \mu)$, определяемые первоначальной системой (151), и сглаженный вектор $\bar{x}(t, \mu)$, определяемый усредненными уравнениями (171) или (172), будут ε-близкими по норме на асимптотически большом интервале времени $t \in [0, A\mu^{-1}]$.

Замечание 2. Обоснованием ε-малости нормы $\|x(t, \mu) - \bar{x}(t, \mu)\|$ при $t \in [0, A\mu^{-1}]$ могут служить при соответствующих условиях, наложенных на правые части системы (151), теоремы 1.3, 1.4, если в системе (151) отсутствуют частотные резонансы, или теорема 1.5 и ее обобщения, если нет застревания в окрестности резонансных точек.

Замечание 3. Одна из наиболее известных сильно возмущенных задач, которой занимались многие выдающиеся математики прошлого,— это задача о движении Луны. Дело в том, что на движение Луны сильно влияет притяжение со стороны Солнца, несмотря на то что расстояние Солнце — Луна примерно в 400 раз больше расстояния Земля — Луна. Сильное возмущение в параметрах геоцентрической орбиты Луны, порождаемое Солнцем, объясняется большой массой последнего (масса Солнца примерно в 330 000 раз больше массы Земли). Более столетия не удавалось построить такую теорию движения Луны, которая находилась бы в хорошем согласии с наблюдениями на относительно большом интервале времени (около 100—200 оборотов Луны). На математическом языке это означает, что не удавалось построить приближенное решение дифференциальных уравнений движения Луны, пригодное для описания ее реального движения на большом (долгом) периоде.

ГЛАВА II

ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ К ОДНОЧАСТОТНЫМ СИСТЕМАМ

В гл. I изложены основные идеи метода Крылова — Бого. бова и его различных вариантов применительно к системам обь новенных дифференциальных уравнений с малым параметр. достаточно общего вида, однако таким, которым не свойствен частотные резонансы. Основная задача, возникающая при иссл довании конкретных колебательных систем, состоит в отыскани периодических или почти периодических решений таких систем, а также в исследовании их устойчивости. Нахождение периодических решений простейших колебательных систем (им обычно соответствуют механические или другие системы с одной степенью свободы), в которых имеется одна главная собственная частота, при отсутствии резонансов частот удается осуществить, используя метод Крылова — Боголюбова, с любой степенью приближения по малому параметру, причем алгоритмы построения решений в этом случае достаточно просты. Математической моделью для таких простейших колебательных процессов может служить скалярное дифференциальное уравнение 2-го порядка типа уравнения Ван-дер-Поля [57] или более древнее уравнение типа маятникова уравнения [58]. Описанные ниже задачи были объектом исследования многих математиков, и тем не менее на них можно посмотреть по-новому. Задачи взяты из различных областей естествознания, но объединяет их общий метод исследования — метод Крылова — Боголюбова в форме, приданной ему создателями метода.

Вторая группа задач включает такие задачи, которые не удается проинтегрировать с помощью асимптотических разложений (хотя их математической моделью является скалярное дифференциальное уравнение 2-го порядка), но удается найти частные стационарные (равновесные) решения и исследовать устойчивость последних. Таких задач в математической литературе рассмотрено достаточно много. В эту главу включены те задачи, которые показались наиболее интересными с точки зрения выявления неожиданных фактов или оригинальных выводов. Читатель, заинтересованный в овладении техникой и алгоритмами асимптотического метода Крылова — Боголюбова, сможет, по нашему мнению, после их изучения самостоятельно решать аналогичные задачи [29, 57].

§ 2.1. Метод гармонического баланса

Одно из многочисленных приложений метода усреднения, которое получило в математической литературе название «метод гармонической линеаризации» или «метод гармонического баланса», было предложено Н. Н. Боголюбовым (см. [29, 58]). Суть его состоит в том, что нелинейные силы, участвующие в колебательных системах, заменяются специальным образом построенными линейными функциями, в силу чего он позволяет использовать теорию линейных дифференциальных уравнений для приближенного анализа нелинейных систем.

Линейные функции, приближенно представляющие нелинейные силы, строятся с помощью специального приема, называемого *гармонической линеаризацией.* Он состоит в следующем.

Пусть задана нелинейная функция (например, сила), зависящая от координаты x, ее производной $\dot{x}$ и малого параметра μ:

$$F(x,\ \dot{x},\ \mu) \equiv \mu f, \quad f \equiv f(x,\ \dot{x}). \tag{2.1}$$

Гармонической линеаризацией называется замена функции $F(x, \dot{x}, \mu)$ линейной функцией вида

$$F_l = kx + \lambda\dot{x}, \tag{2.2}$$

где параметры k, λ вычисляются по формулам

$$\begin{gathered}
k(a,\ \mu) = \frac{\mu}{\pi a}\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi\, d\psi,\\
\lambda(a,\ \mu) = -\frac{\mu}{\pi a\omega}\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\ \sin\psi\, d\psi,\quad \psi = at + \omega.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Если предположить, что $x = a\cos(\omega t + 0)$ и a, ω, θ заданы и постоянны, то нелинейная сила $F(x,\ dx/dt,\ \mu)$ является периодической функцией времени и ее разложение в ряд Фурье содержит, вообще говоря, бесконечное число гармоник с частотами $n\omega$ ($n = 1, 2, \ldots$), т. е. она может быть представлена рядом

$$F\left(x,\ \frac{dx}{dt},\ \mu\right) = \mu\sum_{n=0}^{\infty} F_n\cos(n\omega t + \theta_n). \tag{2.4}$$

Слагаемое $F_1\cos(\omega t + \theta_1)$ называется *основной гармоникой* разложения (4).

Амплитуда a и фаза θ линейной функции F_l совпадают с аналогичными характеристиками основной гармоники нелинейной силы (1). Применительно к часто встречающемуся в теории квазилинейных колебаний дифференциальному уравнению Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + F\left(x, \frac{dx}{dt}, \mu\right) = 0 \tag{2.5}$$

метод гармонического баланса заключается в замене F линейной функцией (2), и вместо уравнения (5) рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + \lambda\frac{d\bar{x}}{dt} + k_1\bar{x} = 0, \qquad k_1 = \omega^2 + k, \tag{2.6}$$

с теми же начальными условиями.

Принято называть функцию F_l *эквивалентной линейной силой*, λ *эквивалентным коэффициентом затухания*, k_1 *эквивалентным коэффициентом упругости.*

Теорема обоснования замены уравнения (5) линейным уравнением (6) является следствием теоремы 1.2 Н. Н. Боголюбова и качественно выражает следующее: если нелинейное уравнение (5) имеет решение вида

$$x = a\cos(\omega t + \theta), \tag{2.7}$$

причем

$$da/dt = O(\mu), \qquad \omega = O(\mu), \tag{2.8}$$

то разность решений уравнений (5) и (6) является величиной $O(\mu^2)$.

Метод гармонического баланса может быть использован при отыскании периодических и квазипериодических колебаний, стационарных режимов в теории нелинейных колебаний, в теории автоматического регулирования [57—61].

§ 2.2. Автономный осциллятор Ван-дер-Поля

Автономный осциллятор Ван-дер-Поля описывается нелинейным дифференциальным уравнением 2-го порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt}, \tag{2.9}$$

где ω — собственная частота колебаний, μ — малый положительный параметр. Начальные условия запишем в виде

$$x(0) = x_0, \qquad dx/dt|_{t=0} = \dot{x}_0. \tag{2.10}$$

К примеру, уравнения вида (9) описывают изменения силы тока в ламповых генераторах с колебательным контуром. Тогда величина ω представляет собой собственную частоту колебательного контура лампового генератора, μ — малый параметр, характеризующий величину связи контура с электронной лампой, x — сила тока. Достаточно подробные исследования различных моделей таких электрических устройств и их математических моделей можно найти в капитальном сочинении по теории колебаний А. А. Андронова, А. А. Витта, С. Э. Хайкина [58]. Эти исследования используют различные варианты метода малого параметра, в частности метода, предложенного Ван-дер-Полем.

Будем искать такое преобразование $(x, \dot{x}) \to (a, \varphi)$:

$$x = a(t)\cos(\omega t + \varphi(t)), \qquad \dot{x} = -a(t)\,\omega \sin(\omega t + \varphi(t)), \tag{2.11}$$

которое приводит уравнение (9) к системе

$$\begin{aligned} da/dt &= \mu a \sin^2\psi\,(1 - a^2\cos^2\psi), \\ d\psi/dt &= \omega + \mu \sin\psi\cos\psi\,(1 - a^2\cos^2\psi). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Соотношение (11) для производной $\dot{x}$ вытекает из классического метода вариации произвольных постоянных, выражаемого в данном случае условием

$$\frac{da}{dt}\cos(\omega t + \varphi(t)) - \frac{d\varphi}{dt}\, a\sin(\omega t + \varphi(t)) = 0.$$

Из (11) легко получить начальные значения $a(0)$, $\varphi(0)$, выраженные через x_0, $\dot{x}_0$:

$$a(0)\cos\varphi(0) = x_0, \qquad -a(0)\,\omega\sin\varphi(0) = \dot{x}_0. \tag{2.13}$$

В математической литературе уравнения (12) часто называются *амплитудно-фазовыми уравнениями*.

Система (12) содержит медленную переменную a и быструю фазу ψ ($\psi = \omega t +$ «медленная фаза» φ), поэтому к ней применима общая методика, изложенная в § 1.11. Будем искать замену переменных вида (1.121)

$$\begin{aligned} a &= \bar{a} + \mu u_1(\bar{a}, \bar{\psi}) + \mu^2 u_2(\bar{a}, \bar{\psi}) + \ldots, \\ \psi &= \bar{\psi} + \mu v_1(\bar{a}, \bar{\psi}) + \mu^2 v_2(\bar{a}, \bar{\psi}) + \ldots, \end{aligned} \tag{2.14}$$

которая преобразовывает (12) к виду

$$\begin{aligned} d\bar{a}/dt &= \mu A_1(\bar{a}) + \mu^2 A_2(\bar{a}) + \ldots, \\ d\bar{\psi}/dt &= \omega + \mu B_1(\bar{a}) + \mu^2 B_2(\bar{a}) + \ldots \end{aligned} \tag{2.15}$$

Заметим, что отыскание преобразования (14) и уравнений (15) в виде рядов правомерно, так как правая часть (9) аналитична по x и $\dot{x}$.

Если выполнить все необходимые для метода усреднения математические операции, то получим бесконечномерную систему уравнений в частных производных для операции $u_k(\underline{a}, \psi)$,

$v_k(\bar{a}, \bar{\psi})$:

$$
\begin{aligned}
&\omega\frac{\partial u_1}{\partial\bar{\psi}} = \frac{\bar{a}(4-\bar{a}^2)}{8} - \frac{\bar{a}}{2}\cos 2\bar{\psi} + \frac{\bar{a}^3}{8}\cos 4\bar{\psi} - A_1(\bar{a}),\\
&\omega\frac{\partial v_1}{\partial\bar{\psi}} = \frac{2-\bar{a}^2}{4}\sin 2\bar{\psi} - \frac{\bar{a}^2}{8}\sin 4\bar{\psi} - B_1(\bar{a}),\\
&\omega\frac{\partial u_2}{\partial\bar{\psi}} = -A_1\frac{\partial u_1}{\partial\bar{a}} - B_1\frac{\partial u_1}{\partial\bar{\psi}} + \frac{u_1}{2}(1-\cos 2\bar{\psi}) + \bar{a}v_1\sin 2\bar{\psi} -\\
&\quad - \frac{3\bar{a}^2u_1}{8}(1-\cos 4\bar{\psi}) - \frac{\bar{a}^3}{2}v_1\sin 4\bar{\psi} - A_2(\bar{a}),\\
&\omega\frac{\partial v_2}{\partial\bar{\psi}} = -A_1\frac{\partial v_1}{\partial\bar{a}} - B_1\frac{\partial v_1}{\partial\bar{\psi}} - \frac{\bar{a}}{2}u_1\sin 2\bar{\psi} -\\
&\quad - \frac{\bar{a}u_1}{4}\sin 4\bar{\psi} + \frac{(1-\bar{a}^2)v_1}{2}\cos 2\bar{\psi} -\\
&\quad - \frac{\bar{a}^2v_1}{2}\cos 4\bar{\psi} - B_2(\bar{a}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Эти уравнения можно последовательно проинтегрировать, но наибольший интерес при изучении колебательных процессов представляют периодические решения. Покажем, что такие решения с помощью метода Крылова — Боголюбова могут быть эффективно построены. Следуя общему алгоритму определения $A_k(\bar{a})$, $B_k(\bar{a})$ (см. (1.137)—(1.139), (1.141), (1.142)), находим сначала

$$
\begin{aligned}
&A_1(\bar{a}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\bar{a}(4-\bar{a}^2)}{8} - \frac{\bar{a}}{2}\cos 2\bar{\psi} + \frac{\bar{a}^3}{8}\cos 4\bar{\psi}\right]d\bar{\psi},\\
&A_1(\bar{a}) = \bar{a}(4-\bar{a}^2)/8,\\
&B_1(\bar{a}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2-\bar{a}^2}{4}\sin 2\bar{\psi} - \frac{\bar{a}^2}{8}\sin 4\bar{\psi}\right]d\bar{\psi} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
&u_1(\bar{a}, \bar{\psi}) = \frac{\bar{a}}{4\omega}\left[-\sin 2\bar{\psi} + \frac{\bar{a}^2}{8}\sin 4\bar{\psi}\right] + \varphi_1(\bar{a}),\\
&v_1(\bar{a}, \bar{\psi}) = -\frac{2-\bar{a}^2}{8\omega}\cos 2\bar{\psi} + \frac{\bar{a}^2}{32\omega}\cos 4\bar{\psi} + \psi_1(\bar{a}),
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

где $\varphi_1(\bar{a})$, $\psi_1(\bar{a})$ — произвольные дифференцируемые функции переменной $\bar{a}$. Чтобы преобразование Крылова — Боголюбова (14) имело тригонометрическую форму, необходимо положить

$\varphi_1(\bar a) \equiv \psi_1(\bar a) \equiv 0$. Окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} u_1(\bar a, \bar\psi) &= \frac{\bar a}{4\omega}\left[-\sin 2\bar\psi + \frac{\bar a^2}{8}\sin 4\bar\psi\right], \\ v_1(\bar a, \bar\psi) &= \frac{1}{8\omega}\left[(\bar a^2 - 2)\cos 2\bar\psi + \frac{\bar a^2}{4}\cos 4\bar\psi\right]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Далее, подставляя выражения (17), (19) в уравнения (16), получим

$$\omega\frac{\partial u_2}{\partial\bar\psi} = \frac{\bar a^3(19 - 4\bar a^2)}{128\omega}\sin 2\bar\psi + \frac{\bar a(-4 + \bar a^2)}{64\omega}\sin 4\bar\psi + \\ + \frac{\bar a^3(3 - 4\bar a^2)}{128\omega}\sin 6\bar\psi - \frac{\bar a^5}{512\omega}\sin 8\bar\psi - A_2(\bar a), \tag{2.20}$$

$$\omega\frac{\partial v_2}{\partial\bar\psi} = \frac{-16 + 4\bar a^2 - 11\bar a^4}{256\omega} - \frac{3\bar a^2 + 2\bar a^4}{128\omega}\cos 2\bar\psi + \\ + \frac{-8 + 4\bar a^2 - 3\bar a^4}{128\omega}\cos 4\bar\psi + \frac{5\bar a^2 - 4\bar a^4}{128\omega}\cos 6\bar\psi - \\ - \frac{\bar a^4}{256\omega}\cos 8\bar\psi - B_2(\bar a). \tag{2.21}$$

Вычисляя $A_2(\bar a)$, $B_2(\bar a)$ по формулам, аналогичным (17), находим

$$A_2(\bar a) = 0, \quad B_2(\bar a) = \frac{-16 + 4\bar a^2 - 11\bar a^4}{256\omega}. \tag{2.22}$$

Поэтому

$$u_2(\bar a, \bar\psi) = \frac{\bar a^3(4\bar a^2 - 19)}{256\omega^2}\cos 2\bar\psi - \frac{\bar a(-4 + \bar a^2)}{1024\omega^2}\cos 4\bar\psi - \\ - \frac{\bar a^3(3 - 4\bar a^2)}{768\omega^2}\cos 6\bar\psi + \frac{\bar a^5}{4096\omega^2}\cos 8\bar\psi + \varphi_2(\bar a),$$

$$v_2(\bar a, \bar\psi) = -\frac{\bar a^2(3 + 2\bar a^2)}{128\omega^2}\sin 2\bar\psi + \frac{-8 + 4\bar a^2 - 3\bar a^4}{512\omega^2}\sin 4\bar\psi + \\ + \frac{5\bar a^2 - 4\bar a^4}{384\omega^2}\sin 6\bar\psi - \frac{\bar a^4}{2048\omega^2}\sin 8\bar\psi + \psi_2(\bar a), \tag{2.23}$$

где $\varphi_2(\bar a)$, $\psi_2(\bar a)$ — произвольные дифференцируемые функции переменной $\bar a$. Для сохранения тригонометрической формы преобразования Крылова — Боголюбова (14) необходимо положить $\varphi_2(\bar a) \equiv \psi_2(\bar a) = 0$.

Таким образом, общая методика из § 1.11 дает возможность последовательно проинтегрировать бесконечномерную систему (16) до любого значения s и, следовательно, получить в тригонометрической относительно $\bar\psi$ форме преобразование Крылова — Боголюбова

$$a = \bar a + \sum_{k=1}^{s}\mu^k u_k(\bar a, \bar\psi), \quad \psi = \bar\psi + \sum_{k=1}^{s}\mu^k v_k(\bar a, \bar\psi), \tag{2.24}$$

которое удовлетворяет с погрешностью $O(\mu^{s+1})$ системе уравнений (13), эквивалентной первоначальному уравнению Ван-дер-Поля (9).

Для того чтобы равенства (24) давали явную зависимость переменных a и ψ от времени t, необходимо найти функции $\bar{a}(t, \mu)$, $\bar{\psi}(t, \mu)$ в результате решения системы (15). Функция $\bar{a}(t, \mu)$ находится из квадратуры

$$\int\limits_{\bar{a}(0,\mu)}^{\bar{a}(t,\mu)} [A_1(\bar{a}) + \mu A_2(\bar{a}) + \ldots + \mu^{s-1} A_s(\bar{a})]^{-1} d\bar{a} = \mu t, \tag{2.25}$$

где начальное значение $a(0, \mu)$ совместно с $\bar{\psi}(0, \mu)$ определяются из системы функциональных уравнений

$$\begin{aligned} &\bar{a}(0, \mu) + \sum_{k=1}^{s} \mu^k u_k(\bar{a}(0, \mu), \bar{\psi}(0, \mu)) = a(0), \\ &\bar{\psi}(0, \mu) + \sum_{k=1}^{s} \mu^k v_k(\bar{a}(0, \mu), \bar{\psi}(0, \mu)) = \psi(0). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Величина $\bar{\psi}(0, \mu)$ понадобится ниже, при определении $\psi(t, \mu)$.

Числа $a(0)$, $\psi(0)$ определяются из условий

$$a(0)\cos\psi(0) = x_0, \qquad a(0)\,\omega\sin\psi(0) = -\dot{x}_0, \tag{2.27}$$

где x_0, $\dot{x}_0$ — начальные значения (10).

Обращение квадратуры (25) дает $\bar{a}(t, \mu)$, после чего находим

$$\bar{\psi}(t, \mu) = \bar{\psi}(0, \mu) + \omega t + \sum_{k=1}^{s} \mu^k \int^{t} B_k(\bar{a}(\tau, \mu))\, d\tau. \tag{2.28}$$

Подставляя теперь $\bar{a}(t, \mu)$, $\bar{\psi}(t, \mu)$ в формулы (24), находим $a(t, \mu)$, $\psi(t, \mu)$ и далее по формулам

$$x(t, \mu) = a(t, \mu)\cos\psi(t, \mu), \qquad \dot{x}(t, \mu) = -a(t, \mu)\,\omega\sin\psi(t, \mu) \tag{2.29}$$

находим решение уравнения Ван-дер-Поля (9), удовлетворяющее начальным условиям (10).

Выражения (29) представляют собой решение уравнения Ван-дер-Поля с медленно изменяющейся амплитудой, и, конечно, в общем случае они не являются периодическими по t, однако система (15) удобна и для отыскания равновесных решений. Действительно, приравнивая правую часть первого уравнения (15) нулю, будем иметь

$$A_1(\bar{a}) + \mu A_2(\bar{a}) + \mu^2 A_3(\bar{a}) + \ldots = 0, \tag{2.30}$$

а с учетом (22) имеем

$$A_1(\bar{a}) + \mu^2 A_3(\bar{a}) + \ldots = 0. \tag{2.31}$$

Уравнение (31) имеет по меньшей мере три вещественных корня:

$$\bar{a}_1 = 0, \quad \bar{a}_2 = 2 + O(\mu^2), \quad \bar{a}_3 = -2 + O(\mu^2). \tag{2.32}$$

Первое решение из (32) соответствует тривиальному решению $\bar{x} \equiv 0$ автономного осциллятора Ван-дер-Поля (9), если $x_0 = \dot{x}_0 = 0$. Два других порождают два периодических решения, так как при постоянном значении $\bar{a}$ квадратура (8) дает

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2(t, \mu) &= [\omega + \mu^2 B_2(\bar{a}_2) + \ldots]t + \psi_0, \\ \bar{\psi}_3(t, \mu) &= [\omega + \mu^2 B_2(\bar{a}_3) + \ldots]t + \psi_0, \end{aligned} \tag{2.33}$$

и окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} x_2(t, \mu) &= [\bar{a}_2 + \mu u_1(\bar{a}_2, \bar{\psi}_2) + \ldots] \cos [\bar{\psi}_2(t, \mu) + \mu v_1(\bar{a}_2, \bar{\psi}_2) + \ldots], \\ x_3(t, \mu) &= [\bar{a}_3 + \mu u_1(\bar{a}_3, \bar{\psi}_3) + \ldots] \cos [\bar{\psi}_3(t, \mu) + \mu v_1(\bar{a}_3, \bar{\psi}_3) + \ldots]. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Периоды этих решений равны соответственно

$$T_2 = \frac{2\pi}{(\omega + \mu^2 B_2(\bar{a}_2) + \ldots)}, \quad T_3 = \frac{2\pi}{(\omega + \mu^2 B_2(\bar{a}_3) + \ldots)}. \tag{2.35}$$

Заметим, что решение $\bar{a}_3 = -2 + O(\mu^2)$ имеет лишь математическое значение, так как величина $\bar{a}$ — это амплитуда, которая по физическому смыслу не может быть отрицательной.

§ 2.3. Неавтономный осциллятор Ван-дер-Поля

Неавтономный осциллятор Ван-дер-Поля описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \mu k \lambda \cos \lambda t, \tag{2.36}$$

где λ — *частота возбуждения*, k — положительный параметр. Предполагается, что

$$\omega - \lambda = O(\mu^\gamma), \qquad \gamma \geqslant 1, \tag{2.37}$$

т. е. собственная частота колебаний и частота возбуждения мало отличаются между собой. Начальные условия запишем в виде

$$x(0) = x_0, \qquad dx/dt|_{t=0} = \dot{x}_0.$$

С помощью преобразования (29) осциллятор (36) приводится к эквивалентной системе двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} da/dt &= \mu a(1 - a^2\cos^2\psi)\sin^2\psi + \frac{\mu k \lambda}{\omega}\sin\psi\cos\lambda t, \\ d\psi/dt &= \omega + \mu(1 - a^2\cos^2\psi)\sin\psi\cos\psi + \frac{\mu k\lambda}{a\omega}\cos\psi\cos\lambda t. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Для отыскания периодических решений уравнения (36) здесь также можно применить общую методику усреднения с той разницей, что замена переменных Крылова — Боголюбова должна быть неавтономной. Будем искать ее в виде

$$\begin{aligned} a &= \bar{a} + \mu u_1(\bar{a}, \bar{\psi}, t) + \mu^2 u_2(\bar{a}, \bar{\psi}, t) + \ldots, \\ \psi &= \bar{\psi} + \mu v_1(\bar{a}, \bar{\psi}, t) + \mu^2 v_2(\bar{a}, \bar{\psi}, t) + \ldots \end{aligned} \tag{2.39}$$

и будем требовать, чтобы она преобразовывала систему (38) либо в систему (15)

$$\begin{aligned} d\bar{a}/dt &= \mu A_1(\bar{a}) + \mu^2 A_2(\bar{a}) + \ldots, \\ d\bar{\psi}/dt &= \omega + \mu B_1(\bar{a}) + \mu^2 B_2(\bar{a}) + \ldots, \end{aligned}$$

либо в систему

$$\begin{aligned} d\bar{a}/dt &= \mu A_1(\bar{a}, \bar{\psi}) + \mu^2 A_2(\bar{a}, \bar{\psi}) + \ldots, \\ d\bar{\psi}/dt &= \omega + \mu B_1(\bar{a}, \bar{\psi}) + \mu^2 B_2(\bar{a}, \bar{\psi}) + \ldots \end{aligned} \tag{2.40}$$

1. Преобразование (38) → (15). Для этого преобразования получаем следующую бесконечномерную систему уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}
&\omega \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\bar{a}(4 - \bar{a}^2)}{8} - \frac{\bar{a}}{2}\cos 2\bar{\psi} + \frac{\bar{a}^3}{8}\cos 4\bar{\psi} + \frac{k\lambda}{\omega}\cos\lambda t \sin\bar{\psi} - A_1(\bar{a}), \\
&\omega \frac{\partial v_1}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{2 - \bar{a}^2}{4}\sin 2\bar{\psi} - \frac{\bar{a}^2}{8}\sin 4\bar{\psi} + \frac{k\lambda}{\bar{a}\omega}\cos\lambda t\cos\bar{\psi} - B_1(\bar{a}), \\
&\omega \frac{\partial u_2}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial u_2}{\partial t} = -A_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{a}} - B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\psi}} + \frac{u_1}{2}(1 - \cos 2\bar{\psi}) + \bar{a}v_1 \sin 2\bar{\psi} - \\
&\qquad - \frac{3\bar{a}^2 u_1}{8}(1 - \cos 4\bar{\psi}) - \frac{\bar{a}^3 v_1}{2}\sin 4\bar{\psi} + \frac{k\lambda v_1}{2\omega}\cos\lambda t\cos\bar{\psi} - A_2(\bar{a}), \\
&\omega \frac{\partial v_2}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial v_2}{\partial t} = -A_1 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{a}} - B_1 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{\psi}} - \frac{\bar{a}u_1}{2}\sin 2\bar{\psi} - \frac{\bar{a}u_1}{4}\sin 4\bar{\psi} + \\
&\qquad + \frac{(2 - \bar{a}^2)v_1}{2}\cos 2\bar{\psi} - \frac{\bar{a}^2 v_1}{2}\cos 4\bar{\psi} - \\
&\qquad - \frac{k\lambda v_1}{2\bar{a}\omega}\cos\lambda t\sin\bar{\psi} - \frac{k\lambda u_2}{\bar{a}^2\omega}\cos\lambda t\cos\bar{\psi} - B_2(\bar{a}),
\end{aligned} \tag{2.41}$$

. . . .

Вычисляя $A_1(\bar{a})$, $B_1(\bar{a})$ как средние значения правых частей уравнений (41) по $\bar{\psi}$ и t, получим

$$A_1(\bar{a}) = \frac{\lambda}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi\lambda^{-1}} \left[\frac{\bar{a}(4-\bar{a}^2)}{8} - \frac{\bar{a}}{2}\cos 2\bar{\psi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{a}^3}{8}\cos 4\bar{\psi} + \frac{k\lambda}{\omega}\cos\lambda t \sin\bar{\psi}\right] d\bar{\psi}\, dt = \frac{\bar{a}(4-\bar{a}^2)}{8}, \quad (2.42)$$

$$B_1(\bar{a}) = 0. \quad (2.43)$$

Подставляя (42), (43) в первые два уравнения системы (41), в результате интегрирования будем иметь

$$u_1(\bar{a}, \bar{\psi}, t) = -\frac{\bar{a}}{4\omega}\sin 2\bar{\psi} + \frac{\bar{a}^3}{32\omega}\sin 4\bar{\psi} - \frac{k\lambda}{2\omega}\left[\frac{\cos(\bar{\psi}+\lambda t)}{\omega+\lambda} + \frac{\cos(\bar{\psi}-\lambda t)}{\omega-\lambda}\right], \quad (2.44)$$

$$v_1(\bar{a}, \bar{\psi}, t) = -\frac{2-\bar{a}^2}{8\omega}\cos 2\bar{\psi} + \frac{\bar{a}^2}{32\omega}\cos 4\bar{\psi} +$$

$$+ \frac{k\lambda}{2\omega}\left[\frac{\sin(\bar{\psi}+\lambda t)}{\omega+\lambda} + \frac{\sin(\bar{\psi}-\lambda t)}{\omega-\lambda}\right]. \quad (2.45)$$

Чтобы не нарушать тригонометрическую форму преобразования Крылова — Боголюбова, мы сразу положили в формулах (44), (45) произвольные функции $\varphi_1(\bar{a})$, $\psi_1(\bar{a})$, возникающие при интегрировании, равными нулю. Заметим, что в функции $u_1(\bar{a}, \bar{\psi}, t)$ имеется «большое» слагаемое порядка $O(\mu^{-1})$, так как выполняется условие (37), поэтому μu_1 может достичь величины порядка $O(1)$.

Алгоритм вычисления $A_s(\bar{a})$, $B_s(\bar{a})$ с помощью формул типа (42), (43) и интегрирование уравнений (41) могут быть применены на следующих шагах итерационного метода, и таким образом можно вычислить любую из функций преобразования (39) u_s, v_s, а также A_s, B_s. Эти выражения весьма громоздки, поэтому их приводить здесь мы не будем, но отметим, что на любом шаге u_s, v_s выражаются через тригонометрические функции аргументов $\bar{\psi}$, t.

2. Преобразование (38)→(40). Для этого преобразования получаем ту же бесконечномерную систему уравнений (41) с той лишь разницей, что вместо $A_k(\bar{a})$, $B_k(\bar{a})$ следует написать $A_k(\bar{a}, \bar{\psi})$, $B_k(\bar{a}, \bar{\psi})$.

Функции A_k, B_k вычисляются из того условия, что средние значения по t правых частей уравнений (41) должны быть равны нулю. Например,

$$A_1(\bar{a}, \bar{\psi}) = \frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\lambda}\left[\frac{\bar{a}}{8}(4-\bar{a}^2) - \frac{a}{2}\cos 2\bar{\psi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{a}^3}{8}\cos 4\bar{\psi} + \frac{k\lambda}{\omega}\cos\lambda t\sin\bar{\psi}\right] dt, \quad (2.46)$$

$$A_1(\bar{a}, \bar{\psi}) = \frac{\bar{a}(4-\bar{a}^2)}{8} - \frac{\bar{a}}{2}\cos 2\bar{\psi} + \frac{\bar{a}^3}{8}\cos 4\bar{\psi},$$

$$B_1(\bar{a}, \bar{\psi}) = \frac{2-\bar{a}^2}{4}\sin 2\bar{\psi} - \frac{\bar{a}^2}{8}\sin 4\psi.$$

В таком случае решение первых двух уравнений системы (41) имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(\bar{a}, \bar{\psi}, t) &= -\frac{k\lambda}{2\omega}\left[\frac{\cos(\bar{\psi}+\lambda t)}{\omega+\lambda} + \frac{\cos(\bar{\psi}-\lambda t)}{\omega-\lambda}\right], \\ v_1(\bar{a}, \bar{\psi}, t) &= \frac{k\lambda}{2\bar{a}\omega}\left[\frac{\sin(\bar{\psi}+\lambda t)}{\omega+\lambda} + \frac{\sin(\bar{\psi}-\lambda t)}{\omega-\lambda}\right]. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Преобразование (38) → (15) можно считать более эффективным, так как система (15) расщепляется на два уравнения, интегрируемые отдельно. Система (40) не обладает таким свойством.

В заключение отметим, что, хотя преобразование Крылова — Боголюбова (39) имеет тригонометрическую форму, тем не менее некоторые члены рядов (39) могут достичь больших значений по абсолютной величине из-за наличия условия (37). Это условие обусловливает появление малых знаменателей вида $(\omega-\lambda)^s$ в выражениях для u_s, v_s и больших периодов $T = 2\pi(\omega-\lambda)^{-1}$ в тригонометрических функциях. Если $\gamma < 1$, то такие явления не наблюдаются. Кроме того, для неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля преобразование Крылова — Боголюбова дает квазипериодическое относительно t решение, так как в случае рациональной несоизмеримости ω и λ функции u_1, v_1, u_2, v_2, ... будут, вообще говоря, квазипериодическими функциями времени.

§ 2.4. Уравнение Дюффинга

Нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = -\mu x^3 \tag{2.48}$$

называется *автономным уравнением Дюффинга*. Зададим начальные условия

$$x(0) = x_0, \qquad dx/dt|_{t=0} = \dot{x}_0 \tag{2.49}$$

и применим к (48) сначала преобразование (29). Получим

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\mu a^3}{4\omega}\sin 2\psi + \frac{\mu a^3}{8\omega}\sin 4\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \frac{3\mu a^2}{8\omega} + \frac{\mu a^2}{2\omega}\cos 2\psi + \frac{\mu a^2}{8\omega}\cos 4\psi. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Система (50) эквивалентна уравнению Дюффинга (48), содержит медленную переменную a и быструю фазу ψ, поэтому, как и в случае осциллятора Ван-дер-Поля, будем искать замену переменных вида (14):

$$a=\bar{a}+\mu u_1(\bar{a},\ \bar{\psi})+\mu^2 u_2(\bar{a},\ \bar{\psi})+\ldots,$$
$$\psi=\bar{\psi}+\mu v_1(\bar{a},\ \bar{\psi})+\mu^2 v_2(\bar{a},\ \bar{\psi})+\ldots,$$

которая преобразовывает систему (50) в систему сравнения (15). Бесконечномерная система, в которой искомыми функциями являются u_1, v_1, u_2, v_2, ..., имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\omega\frac{\partial u_1}{\partial\bar{\psi}}=\frac{\bar{a}^3}{4\omega}\sin 2\bar{\psi}+\frac{\bar{a}^3}{8\omega}\sin 4\bar{\psi}-A_1(\bar{a}),\\
&\omega\frac{\partial v_1}{\partial\bar{\psi}}=\frac{3\bar{a}^2}{8\omega}+\frac{\bar{a}^2}{2\omega}\cos 2\bar{\psi}+\frac{\bar{a}^2}{8\omega}\cos 4\bar{\psi}-B_1(\bar{a}),\\
&\omega\frac{\partial u_2}{\partial\bar{\psi}}=-A_1\frac{\partial u_1}{\partial\bar{a}}-B_1\frac{\partial u_1}{\partial\bar{\psi}}+\frac{\bar{a}^3 v_1}{2\omega}\cos 2\bar{\psi}+\frac{3\bar{a}^2 u_1}{4\omega}\sin 2\bar{\psi}+\\
&\qquad\qquad+\frac{\bar{a}^3 v_1}{2\omega}\cos 4\bar{\psi}+\frac{3\bar{a}^2 u_1}{8\omega}\sin 4\bar{\psi}-A_2(\bar{a}),\\
&\omega\frac{\partial v_2}{\partial\bar{\psi}}=-A_1\frac{\partial v_1}{\partial\bar{a}}-B_1\frac{\partial v_1}{\partial\bar{\psi}}+\frac{3\bar{a}u_1}{4\omega}-\frac{\bar{a}^2 v_1}{\omega}\sin 2\bar{\psi}+\frac{\bar{a}u_1}{\omega}\cos 2\bar{\psi}-\\
&\qquad\qquad-\frac{\bar{a}^2 v_1}{2\omega}\sin 4\bar{\psi}+\frac{\bar{a}u_1}{4\omega}\cos 4\bar{\psi}-B_2(\bar{a}),
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

. . . .

Решение системы (51) можно получить способом, изложенным в § 2.2. Для уничтожения непериодических членов в правых частях первых двух уравнений системы (15) необходимо положить

$$A_1(\bar{a})=0,\qquad B_1(\bar{a})=3\bar{a}^2/(8\omega). \tag{2.52}$$

Интегрируя первое уравнение системы (51), получим

$$
\begin{aligned}
u_1(\bar{a},\bar{\psi})&=-\frac{\bar{a}^3}{8\omega^2}\cos 2\bar{\psi}-\frac{\bar{a}^3}{32\omega^2}\cos 4\bar{\psi},\\
v_1(\bar{a},\bar{\psi})&=\frac{\bar{a}^2}{4\omega^2}\sin 2\bar{\psi}+\frac{\bar{a}^2}{32\omega^2}\sin 4\bar{\psi}.
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

Подставляя выражения (52), (53) в третье уравнение системы (51), находим

$$A_2(\bar{a})=0, \tag{2.54}$$

$$u_2(\bar{a},\bar{\psi})=\frac{41\bar{a}^5}{512\omega^4}\cos 2\bar{\psi}-\frac{\bar{a}^5}{1024\omega^4}\cos 4\bar{\psi}-\frac{9\bar{a}^5}{1536\omega^4}\cos 6\bar{\psi}-\frac{\bar{a}^5}{4096\omega^4}\cos 8\bar{\psi}. \tag{2.55}$$

Аналогично находим

$$B_2(\bar{a}) = -51\bar{a}^4/(256\omega^3), \tag{2.56}$$

$$v_2(\bar{a}, \bar{\psi}) = -\frac{23\bar{a}^4}{128\omega^4}\sin 2\bar{\psi} - \frac{\bar{a}^4}{512\omega^4}\sin 4\bar{\psi} + \frac{3\bar{a}^4}{384\omega^4}\sin 6\bar{\psi} + \frac{\bar{a}^4}{2048\omega^4}\sin 8\bar{\psi}. \tag{2.57}$$

Методом индукции можно показать, что $A_s(\bar{a}) = 0$, если $A_1(\bar{a}) = \ldots = A_{s-1}(\bar{a}) = 0$, т. е. первое уравнение системы (15) с любой точностью относительно μ принимает вид

$$d\bar{a}/dt = 0, \tag{2.58}$$

и в результате интегрирования получаем

$$\bar{a} = \bar{a}(0, \mu). \tag{2.59}$$

Отсюда сразу вытекает, что правая часть второго уравнения (15) равна постоянной с любой относительно μ точностью и

$$\bar{\psi}(t, \mu) = [\omega + \mu B_1(\bar{a}) + \mu^2 B_2(\bar{a}) + \ldots]\,t + \bar{\psi}(0, \mu). \tag{2.60}$$

Таким образом, преобразование Крылова — Боголюбова (14) выражается с помощью 2π-периодических функций относительно $\bar{\psi}$, а формулы (29) дают решение первоначального автономного уравнения Дюффинга с периодом по t

$$T = 2\pi/(\omega + \mu B_1(\bar{a}) + \ldots).$$

Рассмотрим теперь *неавтономное уравнение Дюффинга*

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = -\mu x^3 + k\lambda\cos\lambda t. \tag{2.61}$$

Используя преобразование (29), вместо уравнения (61) получаем систему

$$\frac{da}{dt} = \frac{\mu a^3}{4\omega}\sin 2\psi + \frac{\mu a^3}{8\omega}\sin 4\psi - \frac{k\lambda}{\omega}\cos\lambda t\sin\psi,$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{3\mu a^2}{8\omega} + \frac{\mu a^2}{2\omega}\cos 2\psi + \frac{\mu a^2}{8\omega}\cos 4\psi - \frac{k\lambda}{a\omega}\cos\lambda t\cos\psi. \tag{2.62}$$

К системе (62) следует применять неавтономное преобразование Крылова — Боголюбова (39), которое переводит (62) либо в систему (15), либо в систему (40). Не повторяя выкладки § 2.3, укажем лишь, что и в этом случае $A_1(\bar{a}) = A_2(\bar{a}) = \ldots = 0$, если только частота возбуждения λ и собственная частота ω рационально несоизмеримы. В этом случае получаем квазипериодическое по t решение уравнения Дюффинга (61), так как функции u_1, v_1, ... будут, вообще говоря, квазипериодическими функциями t. Можно показать, что осуществление преобразования

(62)→(40) не приводит к равновесному решению вида (59), так как в этом случае функции $A_1(\bar{a}, \bar{\psi})$, $A_2(\bar{a}, \bar{\psi})$ уже не обращаются в нуль.

§ 2.5. Уравнение Матье

Уравнением Матье называется уравнение

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = -\mu x \cos 2t. \tag{2.63}$$

К нему добавим начальные условия

$$x(0) = x_0, \qquad dx/dt|_{t=0} = \dot{x}_0. \tag{2.64}$$

Следуя уже описанным алгоритмам, будем искать периодическое или квазипериодическое решение уравнения Матье с помощью метода Крылова — Боголюбова. После применения преобразования (29) получаем эквивалентную (63) систему

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\mu a}{4\omega}[\sin(2\psi + 2t) + \sin(2\psi - 2t)], \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \frac{\mu}{2\omega}\cos 2t + \frac{\mu}{4\omega}[\cos(2\psi + 2t) + \cos(2\psi - 2t)] \end{aligned} \tag{2.65}$$

с начальными условиями

$$a(0)\cos\psi(0) = x_0, \qquad a(0)\,\omega\sin\psi(0) = -\dot{x}_0. \tag{2.66}$$

Применяем теперь к системе (65) неавтономное преобразование Крылова — Боголюбова (39), которое преобразовывает систему (65) в систему (15):

$$d\bar{a}/dt = \mu A_1(\bar{a}) + \mu^2 A_2(\bar{a}) + \ldots, \qquad d\bar{\psi}/dt = \omega + \mu B_1(\bar{a}) + \mu^2 B_2(\bar{a}) + \ldots$$

Для функций $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$ получаем следующую систему уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}
&\omega\frac{\partial u_1}{\partial\bar{\psi}} + \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\bar{a}}{2\omega}\cos 2t\sin 2\bar{\psi} - A_1(\bar{a}), \\
&\omega\frac{\partial v_1}{\partial\bar{\psi}} + \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{1}{2\omega}\cos 2t + \frac{1}{2\omega}\cos 2t\cos 2\bar{\psi} - B_1(\bar{a}), \\
&\omega\frac{\partial u_2}{\partial\bar{\psi}} + \frac{\partial u_2}{\partial t} = -A_1\frac{\partial u_1}{\partial\bar{a}} - B_1\frac{\partial u_1}{\partial\bar{\psi}} + \\
&\qquad\qquad + \frac{u_1}{2\omega}\cos 2t\sin 2\bar{\psi} + \frac{\bar{a}v_1}{\omega}\cos 2t\cos 2\bar{\psi} - A_2(\bar{a}), \\
&\omega\frac{\partial v_2}{\partial\bar{\psi}} + \frac{\partial v_2}{\partial t} = -A_1\frac{\partial v_1}{\partial\bar{a}} - B_1\frac{\partial v_1}{\partial\bar{\psi}} - \frac{v_1}{\omega}\cos 2t\sin 2\bar{\psi} - B_2(\bar{a}),
\end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\omega\frac{\partial u_3}{\partial\bar\psi}+\frac{\partial u_3}{\partial t}=-A_1\frac{\partial u_2}{\partial\bar a}-B_1\frac{\partial u_2}{\partial\bar\psi}-A_2\frac{\partial u_1}{\partial\bar a}-B_2\frac{\partial u_1}{\partial\bar\psi}+\frac{u_2}{2\omega}\cos 2t\sin 2\bar\psi+$$
$$+\frac{u_1v_1}{\omega}\cos 2t\cos 2\bar\psi+\frac{\bar a v_2}{\omega}\cos 2t\cos 2\bar\psi-\frac{\bar a v_1^2}{\omega}\cos 2t\sin 2\bar\psi-A_3(\bar a),$$
$$\omega\frac{\partial v_3}{\partial\bar\psi}+\frac{\partial v_3}{\partial t}=-A_1\frac{\partial v_2}{\partial\bar a}-B_1\frac{\partial v_2}{\partial\bar\psi}-A_2\frac{\partial v_1}{\partial\bar a}-B_2\frac{\partial v_1}{\partial\bar\psi}-$$
$$-\frac{v_2}{\omega}\cos 2t\sin 2\bar\psi-\frac{v_1^2}{\omega}\cos 2t\cos 2\bar\psi-B_3(\bar a),$$

. . . .

Система (67) допускает последовательное интегрирование, и ее решение можно выразить через тригонометрические функции аргументов $\bar\psi$ и t, если собственная частота ω не является целым числом и величины $A_s(\bar a)$, $B_s(\bar a)$ выбраны как средние значения правых частей уравнений (67) по $\bar\psi$ и t. Из этих условий сразу получаем

$$A_1(\bar a)=B_1(\bar a)=0. \tag{2.68}$$

Интегрирование первых двух уравнений (67) дает

$$\begin{aligned} u_1(\bar a,\bar\psi,t)&=-\frac{\bar a}{8\omega}\left(\frac{\cos(2\bar\psi+2t)}{\omega+1}+\frac{\cos(2\bar\psi-2t)}{\omega-1}\right),\\ v_1(\bar a,\bar\psi,t)&=\frac{1}{4\omega}\sin 2t+\frac{1}{8\omega}\left(\frac{\sin(2\bar\psi+2t)}{\omega+1}+\frac{\sin(2\bar\psi-2t)}{\omega-1}\right).\end{aligned} \tag{2.69}$$

Из третьего и четвертого уравнений (67) с учетом (68), (69) получаем

$$A_2(\bar a)=0,\qquad B_2(\bar a)=-1/[16\omega(\omega^2-1)], \tag{2.70}$$

а их интегрирование дает

$$u_2(\bar a,\bar\psi,t)=-\frac{\bar a}{256\omega^2(\omega+1)^2}\cos(4\bar\psi+4t)-\frac{\bar a}{256\omega^2(\omega-1)^2}\cos(4\bar\psi-4t)-$$
$$-\frac{\bar a}{128\omega^2(\omega^2-1)}\cos 4\bar\psi+\frac{\bar a(2\omega^2+1)}{128\omega^2(\omega^2-1)}\cos 4t-\frac{\bar a}{32\omega^2(\omega+2)}\cos(2\bar\psi+4t)-$$
$$-\frac{\bar a}{8\omega^3}\cos 2\bar\psi, \tag{2.71}$$

$$v_2(\bar a,\bar\psi,t)=\frac{1}{128\omega^2(\omega+1)^2}\sin(4\bar\psi+4t)+\frac{1}{128\omega^2(\omega-1)^2}\sin(4\bar\psi-4t)+$$
$$+\frac{1}{32\omega^2(\omega+2)}\sin(2\bar\psi+4t)-\frac{1}{32\omega^2(\omega-2)}\sin(2\bar\psi-4t)+$$
$$+\frac{1}{64\omega^2(\omega^2-1)}\sin 4\bar\psi-\frac{1}{64\omega^2(\omega^2-1)}\sin 4t. \tag{2.72}$$

Методом индукции можно показать, что $A_3(\bar{a})=A_4(\bar{a})=\ldots$ $\ldots=0$, и, следовательно,

$$d\bar{a}/dt=0, \quad \bar{a}(t, \mu)=\bar{a}(0, \mu). \tag{2.73}$$

Величины $\bar{a}(0, \mu)$ и $\bar{\psi}(0, \mu)$ определяются в результате решения системы функциональных уравнений

$$\begin{gathered}\bar{a}(0, \mu)+\mu u_1(\bar{a}(0, \mu), \bar{\psi}(0, \mu), 0)+\ldots=a(0),\\ \bar{\psi}(0, \mu)+\mu v_1(\bar{a}(0, \mu), \bar{\psi}(0, \mu), 0)+\ldots=\psi(0).\end{gathered} \tag{2.74}$$

Из второго уравнения (15) получаем

$$\bar{\psi}(t, \mu)=[\omega+\mu^2 B_2(\bar{a})+\ldots]t+\bar{\psi}(0, \mu). \tag{2.75}$$

Таким образом, формулы

$$x(t, \mu)=a(t, \mu)\cos\psi(t, \mu), \quad \dot{x}(t, \mu)=-a(t, \mu)\omega\sin\psi(t, \mu), \tag{2.76}$$

в которых

$$\begin{gathered}a(t, \mu)=\bar{a}+\mu u_1(\bar{a}, \bar{\psi}, t)+\ldots, \qquad \bar{a}=\bar{a}(0, \mu),\\ \psi(t, \mu)=\bar{\psi}+\mu v_1(\bar{a}, \bar{\psi}, t)+\ldots\end{gathered} \tag{2.77}$$

($\bar{\psi}(t, \mu)$ вычисляется по формуле (75)), дают, вообще говоря, квазипериодическое решение исходного уравнения Матье (63).

В заключение заметим, что уравнения Ван-дер-Поля, Дюффинга и Матье с самых различных сторон изучались многими другими математиками [63—69]. Мы же на этих конкретных примерах лишь продемонстрировали достаточно хорошую эффективность преобразования Крылова — Боголюбова.

§ 2.6. Устойчивость колебаний маятника с вибрирующей точкой подвеса

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания физического маятника приведенной длины l в вертикальной плоскости и в однородном поле силы тяжести (с ускорением g), точка подвеса которого совершает в вертикальном направлении синусоидальные колебания с малой амплитудой a_0 и частотой ω (рис. 1), имеет вид [70]

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dx}{dt}+\frac{1}{l}(g-a_0\omega^2\sin\omega t)\sin x=0. \tag{2.78}$$

Исследования уравнения (78), выполненные Н. Н. Боголюбовым [70], привели к открытию неожиданного эффекта, а именно к устойчивости верхнего положения маятника, при котором центр тяжести маятника располагается над точкой подвеса.

Уравнение (78) написано при условии, что затухание колебаний пропорционально скорости с коэффициентом затухания λ. Если считать, что $a_0 \ll l$ (амплитуда колебаний точки подвеса намного меньше приведенной длины маятника), то можно ввести для удобства записи малый параметр

$$\mu = a_0/l, \tag{2.79}$$

«новое» время

$$\tau = \omega t \tag{2.80}$$

и параметры

$$k = l\omega_0/(a_0\omega),$$

$$\alpha = k\lambda/(2\omega_0), \quad \omega_0 = \sqrt{g/l} \tag{2.81}$$

(параметры k, l считаются меньше единицы). Тогда уравнение (78) запишется в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\mu\alpha\frac{dx}{d\tau} + (k\mu^2 - \mu\sin\tau)\sin x = 0. \tag{2.82}$$

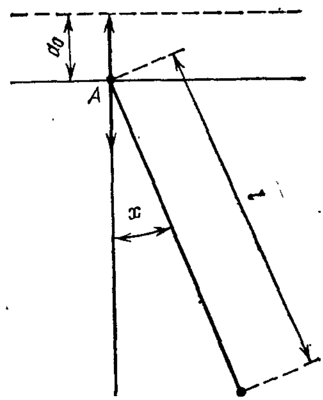

Рис. 1. Изображение физического маятника с вибрирующей в вертикальном направлении точкой подвеса A

При $\mu = 0$ уравнение (82) превращается в равенство $d^2x^{(0)}/d\tau^2 = 0$, а не в равенство $d^2x^{(0)}/d\tau^2 + \omega^2x^{(0)} = 0$, поэтому стандартный алгоритм, эффективно примененный в предыдущих параграфах, здесь не может быть использован.

Для приведения к стандартной в смысле Боголюбова форме уравнения (82) воспользуемся заменой переменных $(x, \dot{x}) \to (a, \psi)$ в виде

$$\begin{aligned} a - \mu\sin\tau\sin a &= x, \\ \mu\psi - \mu\cos\tau\sin a &= dx/d\tau. \end{aligned} \tag{2.83}$$

В новых переменных a, ψ будем иметь систему

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\mu\psi}{1 - \mu\sin\tau\cos a},$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = [\sin(a - \mu\sin\tau\sin a) - \sin a]\sin\tau -$$

$$- k^2\mu\sin(a - \mu\sin\tau\sin a) + \frac{\mu\psi\cos\tau\cos a}{1 - \mu\sin\tau\cos a} - 2\alpha\mu(\psi - \cos\tau\sin a), \tag{2.84}$$

эквивалентную уравнению (82).

Разложение правых частей (84) в ряд по степеням μ дает стандартную в смысле Боголюбова систему

$$\frac{da}{d\tau} = \mu\psi + \mu^2\psi\sin\tau\cos a + \ldots,$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \mu\,[-\sin^2\tau\sin a\cos a - k^2\sin a + \psi\cos\tau\cos a -$$
$$- 2\alpha\psi + 2\alpha\cos\tau\sin a] + \mu^2\Big[-\frac{1}{6}\sin^3\tau\sin^2 a\cos a +$$
$$+ \frac{k^2}{2}\sin\tau\sin a\cos a + \psi\sin\tau\cos\tau\cos^2 a\Big] + \ldots \qquad (2.85)$$

Система (85) является неавтономной, поэтому построим усредненную автономную систему любого приближения с помощью оператора усреднения по τ:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar a}{d\tau} &= \mu\bar\psi + \sum_{s\geqslant 2}\mu^s A_s(\bar a, \bar\psi), \\ \frac{d\bar\psi}{d\tau} &= \mu\Big[-\frac{1}{4}\sin 2\bar a - k^2\sin\bar a - 2\alpha\bar\psi\Big] + \sum_{s\geqslant 2}\mu^s B_s(\bar a, \bar\psi). \end{aligned} \qquad (2.86)$$

Замену, осуществляющую преобразование (85)$\to$(86), будем искать в виде неавтономного преобразования Крылова — Боголюбова (39):

$$a = \bar a + \mu u_1(\bar a, \bar\psi, \tau) + \mu^2 u_2(\bar a, \bar\psi, \tau) + \ldots,$$
$$\psi = \bar\psi + \mu v_1(\bar a, \bar\psi, \tau) + \mu^2 v_2(\bar a, \bar\psi, \tau) + \ldots$$

Уравнения, определяющие функции u_1, v_1, u_2, v_2, ..., записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u_1}{\partial\tau} = 0,$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial\tau} = \frac{1}{4}\cos 2\tau\sin 2\bar a + \bar\psi\cos\tau\cos\bar a + 2\alpha\cos\tau\sin\bar a,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial\tau} = v_1 + \bar\psi\sin\tau\cos\bar a - A_2(\bar a, \bar\psi), \qquad (2.87)$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial\tau} = -\bar\psi\frac{\partial v_1}{\partial\bar a} + \Big[\frac{1}{4}\sin 2\bar a + k^2\sin\bar a + 2\alpha\bar\psi\Big]\frac{\partial v_1}{\partial\bar\psi} - u_1\sin^2\tau\cos 2\bar a -$$
$$- \frac{k^2}{2}u_1\sin\bar a - \frac{\bar\psi u_1}{2}\cos\tau\sin\bar a + v_1\cos\tau\cos\bar a - 2\alpha v_1 + \alpha u_1\cos\tau\cos\bar a -$$
$$- \frac{1}{6}\sin^3\tau\sin^2\bar a\cos\bar a + \frac{k^2}{2}\sin\tau\sin\bar a\cos\bar a +$$
$$+ \bar\psi\sin\tau\cos\tau\cos^2\bar a - B_2(\bar a, \bar\psi),$$

. . . .

Уравнения (87) последовательно можно проинтегрировать, а выбор функций $A_2(\bar a, \bar\psi)$, $B_2(\bar a, \bar\psi)$, ... однозначен: они должны выбираться таким образом, чтобы средние по τ значения правых частей уравнений (87) были равны нулю. В результате интегрирования получим (произвольные функции полагаем равными нулю)

$$u_1(\bar a, \bar\psi, \tau) \equiv 0,$$

$$v_1(\bar a, \bar\psi, \tau) = \frac{1}{8}\sin 2\tau \sin 2\bar a + \bar\psi \sin\tau \cos\bar a + 2\alpha \sin\tau \sin\bar a,$$

$$A_2(\bar a, \bar\psi) = 0,$$

$$u_2(\bar a, \bar\psi, \tau) = -\frac{1}{16}\cos 2\tau \sin 2\bar a - 2\bar\psi \cos\tau \cos\bar a - 2\alpha \cos\tau \sin\bar a,$$

$$B_2(\bar a, \bar\psi) = 0,$$

$$\begin{aligned} v_2(\bar a, \bar\psi, \tau) = {} & \frac{\bar\psi}{8}\cos 2\tau \cos 2\bar a - \bar\psi^2 \cos\tau \sin\bar a + 2\alpha\bar\psi \cos\tau \cos\bar a - \\ & - \frac{1}{4}\cos\tau \sin 2\bar a \cos\bar a - k^2 \cos\tau \sin\bar a \cos\bar a - \\ & - \frac{1}{8}\left(\cos\tau + \frac{1}{3}\cos 3\tau\right)\sin 2\bar a \cos\bar a - \frac{\bar\psi}{2}\cos 2\tau \cos^2\bar a - \\ & - \alpha \cos 2\tau \sin\bar a \cos\bar a + \frac{\alpha}{8}\cos 2\tau \sin 2\bar a + 4\alpha^2 \cos\tau \sin\bar a + \\ & + \frac{1}{8}\cos\tau \sin^2\bar a \cos\bar a - \frac{1}{72}\cos 3\tau \sin^2\bar a \cos\bar a - \frac{k^2}{2}\cos\tau \sin\bar a \cos\bar a - \\ & - \frac{\bar\psi}{4}\cos 2\tau \cos^2\bar a, \end{aligned} \tag{2.88}$$

. . . .

Таким образом, преобразование типа (39), переводящее неавтономную систему (85) в автономную любого приближения (86), найдено.

Выпишем теперь автономную систему первого приближения:

$$\frac{d\bar a}{d\tau} = \mu\bar\psi, \quad \frac{d\bar\psi}{d\tau} = \mu\left(-\frac{1}{4}\sin 2\bar a - k^2 \sin\bar a - 2\alpha\bar\psi\right). \tag{2.89}$$

В предыдущих примерах удавалось проинтегрировать в классе периодических функций уравнение не только первого, но и любого высшего приближения. К сожалению, в случае колебаний маятника уравнения первого приближения (89) не удается проинтегрировать, если $\alpha \neq 0$ (т. е. если учитываются силы трения), хотя при $\alpha = 0$ они интегрируются в эллиптических функциях.

Рассмотрим все же случай $\alpha \neq 0$. Легко проверить, что система (89) допускает частное стационарное решение

$$\bar a = \pi, \quad \bar\psi = 0. \tag{2.90}$$

Геометрически значению $\bar a = \pi$ соответствует верхнее положение маятника, так как из формул (79) и (88) вытекает, что

$$a = \bar{a} + O(\mu^2) = \pi + O(\mu^2). \tag{2.91}$$

Но из формул (83) сразу вытекает, что при этом значении a угол x равен $\pi + O(\mu^2)$.

Изучим устойчивость частного решения (90). Введем малые отклонения x_1, x_2 по формулам

$$\bar{a} = \pi + x_1, \quad \bar{\psi} = x_2. \tag{2.92}$$

Уравнения в вариациях для системы (89) имеют вид

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \mu x_2, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \left(-\frac{\mu}{2} + k^2\mu\right) x_1 - 2\alpha\mu x_2. \tag{2.93}$$

Чтобы исследовать устойчивость решения (90), выпишем матрицу коэффициентов правой части системы (93), которая имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ -\mu/2 + k^2\mu & -2\alpha\mu \end{bmatrix}. \tag{2.94}$$

Ее собственные значения определяются из квадратного уравнения

$$\lambda^2 + 2\alpha\mu\lambda + \mu^2(1/2 - k^2) = 0. \tag{2.95}$$

Так как $\alpha\mu > 0$, из (95) следует, что при

$$1/2 - k^2 > 0 \tag{2.96}$$

оба собственных значения λ_1, λ_2 имеют отрицательные вещественные части. Неравенство (96) с учетом (81) дает

$$\omega > \omega_0\sqrt{2}/\mu. \tag{2.97}$$

Таким образом, если частота ω вибраций точки подвеса достаточно велика, верхнее положение маятника ($x = \pi$) становится устойчивым по меньшей мере в первом приближении. Уравнения второго приближения для колебаний маятника также изучены, и в этом случае получены [71, 72] достаточные условия устойчивости квазистатических решений этих уравнений.

§ 2.7. Колебания крутильной системы под воздействием случайных помех

В § 2.6 мы рассмотрели двухчастотную колебательную систему в однородном поле тяжести. Здесь изучим движения более сложной (пятичастотной) колебательной системы, которая называется горизонтальными крутильными весами, или крутильной системой. Такая система представляет собой механический осциллятор, период крутильных колебаний которого определяется упругими свойствами крутильной нити (жесткостью подвеса), моментом сил, действующим на коромысло в горизонтальной плоскости, и моментом инерции крутильной системы относительно оси нити (рис. 2). Этот высокочувствительный механизм применяется в самых разнообразных приложениях, прежде всего в гравитационных экспериментах, каковым, например, является классический эксперимент по определению гравитационной постоянной [73—75]. Математическая теория колебаний такой системы далека от полного завершения, хотя в ней сделано довольно много [76, 77]. Здесь мы изложим новую методику и результаты, полученные В. К. Милюковым [78, 79].

Для описания математической модели крутильных весов целесообразно ввести следующие системы координат [78, 79] (рис. 3):

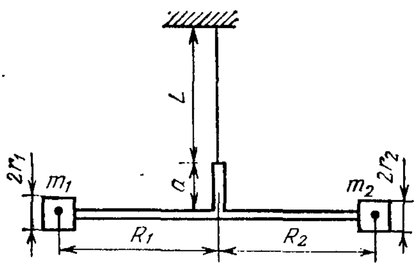

Рис. 2. Изображение крутильной системы

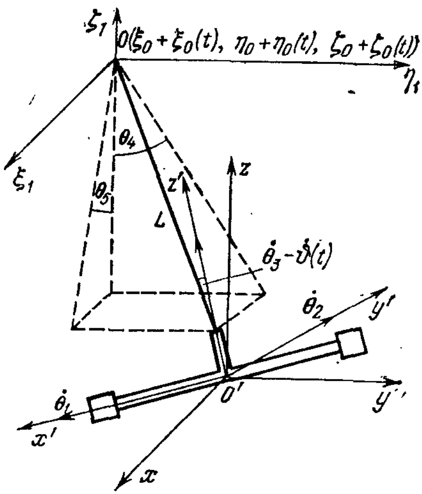

Рис. 3. Системы координат

1. Неподвижную геоцентрическую декартову систему координат $\tilde{O}\xi\eta\zeta$, ось аппликат которой $\tilde{O}\zeta$ перпендикулярна земной поверхности (на рис. 3 она не изображена).

2. Подвижную декартову систему координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ с осями, параллельными осям системы $\tilde{O}\xi\eta\zeta$, и началом в точке подвеса O крутильной системы. Координаты точки O в системе координат $\tilde{O}\xi\eta\zeta$ обозначим через $\xi_0+\xi_0(t)$, $\eta_0+\eta_0(t)$, $\zeta_0+\zeta_0(t)$, где ξ_0, η_0, ζ_0 — постоянные величины, $\xi_0(t)$, $\eta_0(t)$, $\zeta_0(t)$ — случайные смещения.

3. Подвижную систему координат $O'xyz$ с началом в центре масс крутильной системы и осями, параллельными осям $\tilde{O}\xi$, $\tilde{O}\eta$, $\tilde{O}\zeta$.

4. Подвижную систему координат $O'x'y'z'$, жестко связанную с крутильной системой и с осями, направленными по главным осям инерции коромысла.

В качестве обобщенных лагранжевых координатах выбираются следующие углы: θ_1 — угол поворота вокруг оси $O'x'$; θ_2 —

угол поворота вокруг оси $O'y'$ после поворота на θ_1; $\tilde{\theta}_3 = \theta_3 - \vartheta(t)$ — угол поворота оси $O'z'$ после поворота на θ_1 и θ_2 (θ_3 — регулярная функция, $\vartheta(t)$ — случайная функция); θ_4 — угол поворота вокруг оси $O\xi_1$; θ_5 — угол поворота вокруг оси $O\eta_1$. Из рис. 3 видно, что углы поворота θ_1, θ_2, θ_4, θ_5 характеризуют колебания типа маятниковых (колебания с относительно большими частотами), а угол $\tilde{\theta}_3$ характеризует крутильные колебания системы (колебания с относительно небольшой частотой).

Тогда кинетическая энергия крутильных весов представляется формулой

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} I_i\Omega_i^2, \tag{2.98}$$

где: ξ, ζ, η — координаты центра масс; m — общая масса крутильной системы; I_i — ее главные моменты инерции; Ω_1, Ω_2, Ω_3 — проекции соответственно на подвижные оси $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ вектора угловой скорости вращения крутильных весов вокруг оси $O'z'$, проходящей через центр инерции.

Потенциальная энергия весов в неоднородном гравитационном поле представляется в виде разложения формулой

$$U = mg\zeta + \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(k+1)!} D_k(\theta_3 - \vartheta(t))^{k+1}, \tag{2.99}$$

где g — ускорение силы тяжести; коэффициент $D_1 = D_0 + D_g$ — эквивалентная жесткость крутильного маятника, состоящая из жесткости подвеса D_0 и гравитационной жесткости D_g, обусловленной градиентом гравитационного поля в лаборатории; остальные коэффициенты D_k ($k = 2, 3, \ldots$) обусловлены главным образом нелинейностью момента гравитационных сил, так как момент упругих сил достаточно точно описывается (линейным) законом Гука.

Диссипация энергии может быть описана функцией вида

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} h_i\dot{\theta}_i^2, \tag{2.100}$$

в которой коэффициенты h_i зависят от многих физических факторов.

Движение горизонтальных крутильных весов в неоднородном симметричном гравитационном поле при наличии флуктуационного воздействия описывается системой нелинейных стохастических дифференциальных уравнений вида [78]

$$(I_1 + ma^2)\ddot{\theta}_1 + h_1\dot{\theta}_1 + mga\theta_1 = -mLa\ddot{\theta}_4 - ma\ddot{\eta}_0(t) + (I_2 - I_1)\ddot{\theta}_2\theta_3,$$
$$(I_2 + ma^2)\ddot{\theta}_2 + h_2\dot{\theta}_2 + mga\theta_2 = mLa\ddot{\theta}_5 + ma\ddot{\xi}_0(t) + (I_2 - I_1)\ddot{\theta}_1\theta_3,$$

$$I_3\ddot{\theta}_3 + [D_1 + (I_2 - I_1)(\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1^2)]\,\theta_3 + h_3\dot{\theta}_3 =$$
$$= [2(I_2 - I_1)\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2]\,\theta_3^2 - \left[D_3 + \frac{2}{3}(I_2 - I_1)\right](\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2)\,\theta_3^3 -$$
$$- I_3\ddot{\theta}_2\theta_2 + (I_1 - I_2 - I_3)\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - D_5\theta_3^5 + D_1\vartheta(t), \qquad (2.101)$$
$$mL^2\ddot{\theta}_4 + h_4\dot{\theta}_4 + mgL\theta_4 = -mLa\ddot{\theta}_1 - mL\ddot{\eta}_0(t),$$
$$mL^2\ddot{\theta}_5 + h_5\dot{\theta}_5 + mgL\theta_5 = mLa\ddot{\theta}_2 - mL\ddot{\xi}_0(t),$$

где L — длина крутильной нити, a — расстояние от центра масс крутильной системы до точки крепления коромысла к нити. Производные случайных функций $\ddot{\xi}_0(t)$, $\ddot{\eta}_0(t)$, $\ddot{\zeta}_0(t)$ определяются [80] как случайные функции непрерывного аргумента, представляющие континуальное множество детерминированных, дважды дифференцируемых функций.

Упростим несколько модель крутильных весов. Пусть $g = \mathrm{const}$ (гравитационное поле однородно), $\xi_0(t) \equiv \eta_0(t) \equiv \zeta_0(t) \equiv 0$ (отсутствуют случайные смещения точки подвеса) и $\theta_3 = 0$ (отсутствуют регулярные крутильные колебания системы). Тогда первое, второе, четвертое и пятое уравнения системы (101), т. е. уравнения, описывающие маятниковые колебания, становятся линейными с постоянными коэффициентами, и их точное решение не представляет трудностей. После этого третье уравнение системы (101) становится нелинейным уравнением с переменными коэффициентами, точное решение которого в аналитическом виде не удается найти. В данном случае оно не зависит от других уравнений системы, и его следует решать каким-либо приближенным методом. В общем случае такое расщепление системы (101) не имеет места, поэтому нахождение ее приближенного решения также представляет собой достаточно сложную задачу. Остроумный метод ее решения, основанный на условном расщеплении системы в сочетании с методом усреднения, предложил В. К. Милюков [78]. Суть его состоит в следующем. Составим две подсистемы уравнений: первое и четвертое уравнения системы (101) и второе и пятое уравнения. Эти подсистемы описывают маятниковые колебания весов в двух вертикальных плоскостях. После того как в результате решения этих подсистем найдены функции $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, далее решается третье уравнение системы (101), которое описывает крутильные колебания.

Следуя изложенной идее, выпишем сначала подсистемы

$$(I_1 + ma^2)\,\ddot{\theta}_1 + h_1\dot{\theta}_1 + mga\theta_1 + mLa\ddot{\theta}_4 = -ma\ddot{\eta}_0(t) + (I_2 - I_1)\ddot{\theta}_2\theta_3, \qquad (2.102)$$

$$
\begin{aligned}
&mLa\ddot{\theta}_1 + mL^2\ddot{\theta}_4 + h_4\theta_4 + mgL\theta_4 = -mL\ddot{\eta}_0(t),\\
&(I_2 + ma^2)\ddot{\theta}_2 + h_2\dot{\theta}_2 + mga\theta_2 - mLa\ddot{\theta}_5 =\\
&\qquad\qquad = ma\ddot{\xi}_0(t) + (I_2 - I_1)\ddot{\theta}_1\theta_3,\\
&-mLa\ddot{\theta}_2 + mL^2\ddot{\theta}_5 + h_5\dot{\theta}_5 + mgL\theta_5 = -mL\ddot{\xi}_0(t).
\end{aligned}
\tag{2.103}
$$

В подсистеме (102) неизвестными считаются функции $\theta_1(t)$, $\theta_4(t)$, в (103) — функции $\theta_2(t)$, $\theta_5(t)$.

Последние слагаемые в правых частях первых уравнений подсистем (102), (103) в гравиметрии можно трактовать как регулярные вынуждающие силы, в амплитудах которых θ_3 играет роль медленно меняющегося множителя, так как для крутильных весов рассматриваемого типа частоты маятниковых колебаний много меньше частоты крутильных колебаний, т. е. $\omega_м \ll \omega_к$, где через $\omega_м$, $\omega_к$ обозначены любая из частот соответственно маятниковых и крутильных колебаний. При таких допущениях подсистемы (102), (103) становятся линейными, и алгоритм их решения хорошо известен:

1) находим общее решение однородной подсистемы;

2) находим частное решение неоднородной подсистемы, обусловленное наличием в правых частях случайных колебаний;

3) имея значения функций $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ в результате осуществления первых двух этапов, вычисляем их производные $\ddot{\theta}_1(t)$, $\ddot{\theta}_2(t)$ и заменяем их в последних слагаемых первых уравнений подсистем (102), (103); далее находим второе частное решение, так как слагаемые $(I_2 - I_1)\ddot{\theta}_2\theta_3$ и $(I_2 - I_1)\ddot{\theta}_1\theta_3$ уже известны.

Таким образом, решение указанных подсистем для каждой маятниковой координаты представляются суммой стационарных случайных квазигармонических колебаний всех маятниковых частот с флуктуирующими амплитудами и фазами:

$$
\begin{aligned}
\theta_1(t) &= \sum_{i=1,4} k_{1i}A_i(t)\cos(\omega_i t + \varphi_i(t)) +\\
&\qquad + \theta_3 \sum_{i=2,5} k_{2i}A_i(t)\cos(\omega_i t + \varphi_i(t)),\\
\theta_2(t) &= \sum_{i=2,5} k_{2i}A_i(t)\cos(\omega_i t + \varphi_i(t)) +\\
&\qquad + \theta_3 \sum_{i=1,4} k_{1i}A_i(t)\cos(\omega_i t + \varphi_i(t)).
\end{aligned}
\tag{2.104}
$$

Безразмерные коэффициенты k_{1i}, k_{2i} характеризуют геометрию весов. Собственные маятниковые частоты ω_i определяются выражениями

$$
\omega_i^2 = \frac{g\left[I_i + ma^2 + maL + \sqrt{(I_i + ma^2 + maL)^2 - 4I_i maL}\right]}{2I_i L}, \qquad i = 1, 2,
\tag{2.105}
$$

$$\omega_i^2 = \frac{g\left[I_{i-3} + ma^2 + maL - \sqrt{\left(I_{i-3} + ma^2 + maL\right)^2 - 4I_{i-3}maL}\right]}{2I_{i-3}L},$$

$$i = 4, 5.$$

Случайный характер огибающих амплитуд квазигармонических колебаний $A_i(t)$ и фаз $\varphi_i(t)$ обусловлен действующим на подвес системы шумом. При этом, если шум распределен по нормальному закону, то значения фазы равновероятны в интервале $(-\pi, \pi)$ [81], а среднее значение огибающей равно

$$\langle A_i(t)\rangle = \sigma_i\sqrt{\pi/2}, \tag{2.106}$$

где

$$\sigma_i^2 = N_0\omega_i^2/(8g^2\delta_i), \qquad i = 1, 2, 4, 5, \tag{2.107}$$

число N_0 — спектральная плотность шумов $\ddot{\xi}_0(t)$ и $\ddot{\eta}_0(t)$, действующих в некоторой изучаемой полосе частот, δ_i — коэффициенты затухания маятниковых колебаний (для простоты считается, что шумы $\ddot{\xi}_0(t)$ и $\ddot{\eta}_0(t)$ имеют одинаковую спектральную плотность).

По аналогии с гармоническими колебаниями два первых слагаемых в каждом выражении (104) можно рассматривать как собственные маятниковые колебания, а два последних — как результат нелинейной связи с маятниковыми колебаниями в другой плоскости и крутильными колебаниями. Решения для $\theta_4(t)$ и $\theta_5(t)$ мы выписывать не будем, так как при дальнейшем рассмотрении они не понадобятся.

Рассмотрим теперь третье уравнение (101), описывающее крутильные колебания:

$$\begin{aligned} I_3\ddot{\theta}_3 + h_3\dot{\theta}_3 + D_1\theta_3 + D_3\theta_3^3 + D_5\theta_3^5 + D_1\vartheta(t) = \\ = (I_2 - I_1)\left(\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2\right)\theta_3 + 2(I_2 - I_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\theta_3^2 - \\ - (2/3)(I_2 - I_1)\left(\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2\right)\theta_3^3 - I_3\ddot{\theta}_1\theta_2 + (I_1 - I_2 - I_3)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Здесь правая часть является нелинейной комбинацией функций θ_1 и θ_2 и их производных. Из (101) и (108) видно, что слагаемые в правой части — двух типов: 1) содержащие произведения маятниковых и крутильной координат и 2) содержащие только маятниковые координаты. Так как для крутильных весов, выполненных в виде гантели, удовлетворяются условия $\omega_3 \ll \omega_м$ и $\omega_3 \ll |\omega_i \pm \omega_j|$ $(i = 1, 4;\ j = 2, 5)$, в слагаемых первого типа произведения маятниковых колебаний можно рассматривать как быстро осциллирующие коэффициенты при различных степенях θ_3. Поэтому заменим эти осциллирующие коэффициенты и слагаемые второго типа их средними значениями, оставив неусредненными только колебания на наиболее низких комбинационных маятниковых частотах.

В результате такого усреднения правой части и некоторых стандартных преобразований уравнение (108) приводится к виду [78]

$$\ddot{\theta}_3 + 2\delta_3\dot{\theta}_3 + \omega_{30}^2\theta_3 = \varepsilon_3\theta_3^3 + \varepsilon_5\theta_3^5 - \omega_{30}^2\vartheta(t) + \sum_{i,j} B_{ij}(t)\cos\nu_{ij}(t), \tag{2.109}$$

где введены обозначения: $\omega_{30}^2 = D_1/I_3$ — невозмущенная частота крутильных колебаний; $\nu_{ij} = |\omega_i - \omega_j|$ — комбинационные маятниковые частоты;

$$\begin{gathered} B_{ij} = \frac{I_2 - I_1}{I_3}\omega_i\omega_j k_{1i}k_{2j}A_iA_j, \qquad 2\delta_3 = \frac{h_3}{I_3}, \\ \varepsilon_3 = -\frac{1}{I_3}\left[D_3 + \frac{1}{3}(I_1 - I_2)\sum_{i,j}\omega_i^2 k_{ij}\sigma_i^2\right], \qquad \varepsilon_5 = -\frac{D_5}{I_3}. \end{gathered} \tag{2.110}$$

Уравнение (109) является нелинейным (содержит члены с θ_3^3 и θ_3^5), неавтономным (содержит сумму квазигармонических колебаний разных частот), стохастическим (содержит случайную величину $\vartheta(t)$). Его решение (точнее, два первых приближения) можно получить методом усреднения Крылова — Боголюбова. Первое приближение для решения уравнения (109) представляет собой квазигармонические колебания с флуктуирующими амплитудой и фазой, частота которых сдвинута по отношению к невозмущенной частоте ω_3:

$$\begin{gathered} \theta_3^{(\mathrm{I})}(t) = \bar{A}_3(t)\cos(\omega_{30}t + \bar{\varphi}_3(t)), \\ \bar{A}_3(t) = (A_{30} - A_{\text{фл}})\exp\{-\delta_3 t\}, \\ \bar{\varphi}_3(t) = \varphi_{30} + \varphi_{\text{фл}}(t) - \frac{3\varepsilon_3}{8\omega_{30}}\bar{A}_3^2(t), \end{gathered} \tag{2.111}$$

где A_{30}, φ_{30} — начальные значения амплитуды и фазы крутильных колебаний, а флуктуационные члены определяются выражениями

$$A_{\text{фл}} = -\frac{\omega_{30}}{\sqrt{2}}\int_0^t \vartheta(\tau)\exp\{\delta_3\tau\}\,d\tau, \qquad \varphi_{\text{фл}} = -\frac{\omega_{30}}{\bar{A}_3\sqrt{2}}\int_0^t \vartheta(\tau)\,d\tau. \tag{2.112}$$

Решение улучшенного первого приближения содержит, помимо основной гармоники, гармонику третьей кратности и вынужденные колебания на комбинационных маятниковых частотах:

$$\vartheta_3^{(11)}(t) = \bar{A}_3(t)\cos(\omega_{30}t + \bar{\varphi}_3(t)) - \\ - \frac{\varepsilon_3 A_3^3}{32\omega_{30}^2}\cos 3(\omega_{30}t + \bar{\varphi}_3(t)) + \sum_{i,j}\frac{B_{ij}}{\omega_3^2 - \nu_{ij}^2}\cos\nu_{ij}t, \quad (2.113)$$

где $\bar{A}_3(t)$, $\bar{\varphi}_3(t)$ определены выражениями первого приближения.

Решение уравнения (109) во втором приближении имеет вид улучшенного первого приближения, в которое подставлена частота колебаний второго приближения:

$$\omega_3^{(2)} = \omega_{30}\left[1 - \frac{3\varepsilon_3\bar{A}_3^2}{8\omega_{30}^2} - \frac{\delta_3^2}{2\omega_{30}^2} - \left(\frac{51\varepsilon_3^2}{256\omega_{30}^4} + \frac{5\varepsilon_5}{16\omega_{30}^2}\right)\bar{A}_3^4 - \right. \\ \left. - \frac{1}{4}\sum_{i,j}\frac{B_{ij}}{\bar{A}_3^2\omega_{30}^2\left(\omega_{30}^2 - \nu_{ij}^2\right)} + \frac{\vartheta(t)}{\bar{A}_3\sqrt{2}}\right]. \quad (2.114)$$

Отметим, что в отличие от квазигармонических маятниковых колебаний, которые являются стационарным процессом, квазигармонические крутильные колебания следует рассматривать как нестационарный переходный процесс, поэтому все статические и спектральные характеристики крутильных колебаний в общем случае будут функциями времени наблюдения.

Согласно теории метода усреднения [17, 29], решение каждого приближения аппроксимирует решение исходного уравнения с точностью до значений, пропорциональных соответствующим степеням малых параметров ε_i. Так, решения второго приближения учитывают члены, пропорциональные ε_3^2. Численное значение этих членов определяется конкретными условиями эксперимента. Оценка точности полученных решений для экспериментальной установки ГАИШ по определению гравитационной постоянной показывает [78, 79], что решение первого приближения для частоты крутильных колебаний учитывает члены, отношение которых к невозмущенной частоте ω_{30} имеет порядок 10^{-5}—10^{-6}. Решение второго приближения учитывает члены, аналогичное отношение которых 10^{-7}—10^{-8}. Таким образом, на современном этапе определения гравитационной постоянной в большинстве экспериментов, по-видимому, достаточно пользоваться решением первого приближения.

В заключение отметим, что этот важный для гравиметрии результат получен с помощью специфической процедуры усреднения нелинейного дифференциального уравнения (108), задача математического обоснования которого ждет еще своего решения.

§ 2.8. Определение периода вращения планеты Меркурий вокруг своей оси

Одно из наиболее неожиданных открытий по динамике планет Солнечной системы — это установление нового значения для периода вращения Меркурия вокруг своей оси. До недавнего времени астрономы считали, что период вращения равен (точнее, приближенно равен) орбитальному периоду движения планеты вокруг Солнца, т. е. 88 суткам.

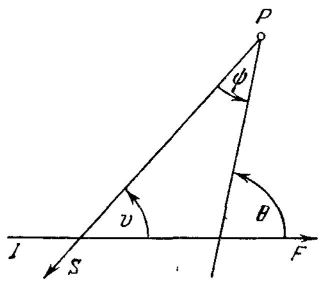

Рис. 4. Изображение вращательного движения Меркурия. IF — линия апсид орбиты Меркурия; v — истинная аномалия центра масс Меркурия; θ — угол, образованный большой полуосью планеты с прямой IF; PS — направление на Солнце; $\psi = \theta - v$.

Если ввести две частоты: n_1 — среднюю угловую скорость Меркурия вокруг Солнца и n_2 — среднюю угловую скорость вращательного движения Меркурия,— то, согласно прежним представлениям, имел место резонанс частот $n_1 : n_2 \approx 1 : 1$. На самом деле получилась совсем иная картина. Период вращения Меркурия вокруг своей оси оказался равным 59 суткам, что соответствует резонансу частот $n_1 : n_2 \approx 3 : 2$. Этот факт вытекает из более точной теории вращательного движения Меркурия, разработанной П. Голдрайхом и С. Пилом [82], основные моменты которой мы здесь излагаем.

Рассмотрим случай, когда ось вращения планеты перпендикулярна плоскости ее орбиты; именно этот случай подходит для описания вращения Меркурия.

Если ввести систему углов, изображенную на рис. 4, и через $A < B < C$ обозначить главные моменты инерции планеты, рассматриваемой как твердое тело, то при некоторых разумных упрощениях для угла θ получим следующее дифференциальное уравнение 2-го порядка [82]:

$$C\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3fm_0(B-A)}{2r^3}\sin^2(\theta - v) = T. \qquad (2.115)$$

Здесь T — момент приливных сил, обусловленных притяжением со стороны Солнца планеты, рассматриваемой как тело, m_0 — масса Солнца, f — постоянная тяготения, r — модуль радиус-вектора, v — истинная аномалия центра инерции Меркурия. Как видно из рис. 4, угол θ характеризует вращательное движение наибольшей из полуосей эллипсоида инерции в плоскости орбиты относительно линии апсид, т. е. прямой, проходящей через перигелий и афелий орбиты Меркурия. Так как r и v весьма сложным образом зависят от времени t в соответствии с формулами задачи двух тел [7], дифференциальное уравнение (115) непосредственно не интегрируется, поэтому применим к нему метод усреднения.

Авторы работы [82] ввели сначала вместо искомой функции θ новую функцию γ по формуле

$$\gamma = \theta - (q/s)M, \tag{2.116}$$

где q/s — рациональное число, равное половине целого числа, M — средняя аномалия (средняя долгота) центра Меркурия [7, 82]. Для γ получается нелинейное дифференциальное уравнение

$$C\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{3fm_0(B-A)}{2r^3}\sin^2\left(\gamma + \frac{qM}{s} - v\right) = T. \tag{2.117}$$

Оно, естественно, также не интегрируется. Так как для эллиптических орбит [7]

$$r = a(1-e^2)/(1+e\cos v), \tag{2.118}$$

то для нахождения долгопериодических гармоник, содержащихся в функции $r^{-3}\sin^2(\gamma + qM/s - v)$, следует выделить из нее такие слагаемые, которые с точностью до высших степеней эксцентриситета орбиты не содержат среднюю аномалию M, так как, согласно уравнению центра [7],

$$v = M + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(e)\sin kM. \tag{2.119}$$

Эта операция равносильна усреднению функции $r^{-3}\sin^2(\gamma + qM/s - v)$ по M в пределах $[0, 2\pi]$ после замены истинной аномалии v по формуле (119).

Полученное таким образом усредненное уравнение, соответствующее (117), будет иметь вид

$$C\frac{d^2\bar\gamma}{dt^2} + \frac{3fm_0(B-A)}{2a^3}H\left(\frac{q}{s}, e\right)\sin 2\bar\gamma = \bar T, \tag{2.120}$$

где $\bar T$ — усредненное на периоде значение момента приливных сил, коэффициент $H(q/s, e)$ является степенным рядом по степеням эксцентриситета e и имеет порядок $O(\exp\{2|q-s|/s\})$, а величина fm_0/a^3, согласно третьему закону Кеплера [7], равна квадрату средней угловой скорости n_1, т. е.

$$fm_0/a^3 = n_1^2. \tag{2.121}$$

При $\bar T = 0$ уравнение (120) принимает вид

$$C\frac{d^2\bar\gamma}{dt^2} + \frac{3}{2}(B-A)n_1^2 H\left(\frac{q}{s}, e\right)\sin 2\bar\gamma = 0 \tag{2.122}$$

и интегрируется в эллиптических функциях. Но при исследовании устойчивости вращательного движения планеты нас прежде всего интересуют его стационарные частные решения, каковыми являются

$$\bar{\gamma} = 0, \tag{2.123}$$

$$\bar{\gamma} = \pi/2. \tag{2.124}$$

Напишем уравнения в вариациях для каждого случая отдельно. В первом случае ($\bar{\gamma} = 0$) будем иметь

$$C\frac{d^2x_1}{dt^2} + 3(B - A)n_1^2 H\left(\frac{q}{s}, e\right)x_1 = 0, \tag{2.125}$$

а во втором ($\bar{\gamma} = \pi/2$)

$$C\frac{d^2x_1}{dt^2} - 3(B - A)n_1^2 H\left(\frac{q}{s}, e\right)x_1 = 0. \tag{2.126}$$

Так как знаки вторых слагаемых в (125), (126) противоположны, отсюда следует, что условие устойчивости частного решения $\bar{\gamma} = 0$ ($H(q/s, e) > 0$) является условием неустойчивости решения $\bar{\gamma} = \pi/2$, и наоборот.

Если теперь вернуться к случаю $\bar{T} \neq 0$, то критерием устойчивости найденных частных решений является выполнение неравенства

$$|\bar{T}| < \frac{3}{2}(B - A)n_1^2\left|H\left(\frac{q}{s}, e\right)\right|. \tag{2.127}$$

Используя эти оценки, а также орбитальные параметры Меркурия, Голдрайх и Пил нашли, что резонансное вращение с рациональным числом $q/s = 3/2$ устойчиво, если главные моменты инерции планеты удовлетворяют неравенству

$$(B - A)/C > 10^{-8},$$

что может оказаться правдоподобным для внутренних планет Солнечной системы, к которым относится и Меркурий. Число $q/s = 3/2$ и порождает период вращения Меркурия, равный 59 суткам, вместо прежнего, который считался равным 88 суткам.

В заключение отметим, что в исследовании [82] не строятся замены переменных вида (39) и усредненные уравнения высших приближений, как мы поступали в предыдущих параграфах, хотя в принципе описанные алгоритмы применимы и здесь. Однако в рамках теории первого приближения оба способа равносильны. Кроме того, отметим, что, хотя в начале мы говорили о двухчастотной резонансной задаче, на самом деле модельное уравнение (115) можно считать задачей с одной основной собственной частотой

$$\omega_0 = n_1\sqrt{3(B - A)/(2C)}.$$

§ 2.9. Метод асимптотических разложений в системах с N степенями свободы

Как известно [4, 83], основными уравнениями динамики, записанными в обобщенных координатах $x_1, \ldots, x_N$, являются уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_s}=Q_s, \qquad s=1, \ldots, N, \tag{2.128}$$

где $T(t, x_1, \ldots, x_N; \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N)$ — кинетическая энергия механической системы с N степенями свободы, $Q_s(t, x_1, \ldots, x_N; \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N)$ — обобщенные силы, действующие на систему. N-мерный вектор $x=(x_1, \ldots, x_N)$, характеризующий состояние механической системы в пространстве координат $x \in X$, может, в частности, иметь своими компонентами обычные декартовы координаты x_k, y_k, z_k точки P_k $(k=1, \ldots, n)$, и тогда $N=3n$. Компонентами вектора x могут быть и любые другие применяемые в динамике обобщенные координаты.

Когда в механической системе имеются нестационарные связи, кинетическая энергия T представляется в виде суммы

$$T=T_2+T_1+T_0, \tag{2.129}$$

где T_2 — квадратичная форма относительно производных $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N$:

$$T_2=(A(t, x)\dot{x}, \dot{x})=\sum_{k,s=1}^{N} a_{ks}(t, x_1, \ldots, x_N)\dot{x}_k\dot{x}_s, \tag{2.130}$$

T_1 — линейная форма относительно $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N$:

$$T_1=\sum_{k=1}^{N} b_k(t, x_1, \ldots, x_N)\dot{x}_k; \tag{2.131}$$

T_0 не зависит от скоростей $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N$:

$$T_0=T_0(t, x_1, \ldots, x_N). \tag{2.132}$$

Обычно при достаточно большом N в механических колебательных системах могут возникнуть резонансные явления, однако существуют и такие модели, которые ведут себя как одночастотные. Здесь мы рассмотрим именно последний случай. В следующих главах будут рассмотрены многочастотные системы.

Пусть движение колебательной системы с N степенями свободы описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами [84]

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} a_{ks}(\tau)\dot{x}_k + \sum_{k=1}^{N} b_{ks}(\tau)x_k =$$
$$= \mu Q_s(\tau, \theta, x_1, \ldots, x_N; \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N), \qquad s = 1, \ldots, N, \quad (2.133)$$

где t — время; $\tau = \mu t$ — медленное время; μ — малый параметр; $x_1, \ldots, x_N$ — обобщенные координаты; $a_{ks}(\tau) = a_{sk}(\tau)$ и $b_{ks}(\tau) = b_{sk}(\tau)$ — некоторые функции, обладающие производными любого порядка при всех конечных значениях τ; Q_s — 2π-периодические по θ функции, неограниченное число раз дифференцируемые при всех конечных значениях своих аргументов; $d\theta/dt = \nu(\tau)$ — неотрицательная дифференцируемая функция при всех конечных значениях τ. Система (133) является частным случаем уравнений Лагранжа второго рода (128) в том смысле, что здесь кинетическая энергия T зависит от медленного времени τ, ее квадратичная часть T_2 не зависит от обобщенных координат $x_1, \ldots, x_N$, T_1 отсутствует, форма T_0 является квадратичной относительно $x_1, \ldots, x_N$, а обобщенные силы малы вместе с малым параметром μ. Формализуя дальше запись, можно написать

$$T_2 = (A(\tau)\dot{x}, \dot{x}), \quad (2.134)$$
$$T_0 = (B(\tau)x, x), \quad (2.135)$$

где медленно изменяющиеся матрицы $A(\tau)$, $B(\tau)$ порядка $N \times N$ являются симметричными.

Наряду с возмущенной системой (133) будем рассматривать невозмущенную систему с постоянными коэффициентами [84]

$$\sum_{k=1}^{N} a_{ks}(\tau)\ddot{x}_k + \sum_{k=1}^{N} b_{ks}(\tau)x_k = 0, \qquad s = 1, \ldots, N, \quad (2.136)$$

получаемую из (133) при $\mu = 0$ и $\tau = \text{const}$ (сдвиг по t на постоянную величину означает смещение начала отсчета медленного времени и не влияет на справедливость рассуждений). В частности, можно построить частные решения системы (136), соответствующие нормальным колебаниям вида

$$x_k^{(s)}(t) = \varphi_k^{(s)} a_s \cos(\omega_s t + \alpha_s), \qquad k, s = 1, \ldots, N, \quad (2.137)$$

где a_s, α_s — некоторые постоянные, ω_s — собственные частоты, определяемые уравнением

$$\det(-a_{ks}\omega^2 + b_{ks}) = 0, \quad (2.138)$$

$\varphi_k^{(s)}$ — нетривиальные решения системы однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} \left(-a_{ks}\omega_j^2 + b_{ks}\right)\varphi_k^{(j)} = 0, \qquad s, j = 1, \ldots, N, \quad (2.139)$$

обладающие свойством ортогональности

$$\sum_{k,s=1}^{N} a_{ks}\varphi_k^{(j)}\varphi_s^{(l)} = 0, \qquad \sum_{k,s=1}^{N} b_{ks}\varphi_k^{(j)}\varphi_s^{(l)} = 0, \qquad j, l = 1, \ldots, N, \quad j \neq l. \tag{2.140}$$

Величины ω_s и $\varphi_k^{(j)}$, как и коэффициенты уравнений (136), зависят от параметра τ. Если положить в уравнениях (136) и выражениях (137) $\tau = \mu t$, то функции (137) будут только приближенно (с точностью до величины порядка μ) удовлетворять уравнениям (136), представляя собой функции с медленно изменяющимися амплитудами.

Перейдем теперь к построению асимптотических решений возмущенной системы (133), соответствующих одночастотным колебаниям, близким (при достаточно малых μ) к одному из нормальных невозмущенных колебаний (137) (для определенности будем ориентироваться на первое уравнение). Допустим, что для всех значений параметра $\tau \in [0, L]$ выполняются условия [84]:

1) в невозмущенной системе возможны незатухающие гармонические колебания с частотой $\omega_1(\tau)$, зависящие только от двух произвольных постоянных;

2) единственным решением системы уравнений (136), соответствующим положению равновесия в невозмущенной системе, является тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_N = 0$;

3) в невозмущенной системе отсутствуют внутренние резонансы, т. е. $r\omega_1(\tau) \neq s\omega_k(\tau)$ $(k = 2, \ldots, N)$, где s и r — взаимно простые числа.

При этих допущениях и при наличии в возмущенной системе комбинационного резонанса

$$q\omega_1(\tau) \approx p\nu(\tau), \qquad \tau \in [0, L],$$

будем искать решение уравнений возмущенной системы (133) в виде асимптотических рядов

$$x_k(t) = \varphi_k^{(1)}(\tau)\, a\cos\xi + \mu U_k^{(1)}(\tau, a, \xi, \theta) + \mu^2 U_k^{(2)}(\tau, a, \xi, \theta) + \ldots,$$
$$\xi = p\theta/q + \psi, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{2.141}$$

в которых: $\tau = \mu t$; функции $U_k^{(s)}(\tau, a, \xi, \theta)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ — 2π-периодические по ξ и θ; p и q — взаимно простые числа; величины a и ψ определяются из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu A_1(\tau, a, \psi) + \mu^2 A_2(\tau, a, \psi) + \ldots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1(\tau) - \frac{p\nu(\tau)}{q} + \mu B_1(\tau, a, \psi) + \mu^2 B_2(\tau, a, \psi) + \ldots, \end{aligned} \tag{2.142}$$

где $A_k(\tau, a, \psi)$, $B_k(\tau, a, \psi)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — 2π-периодические функции по ψ. Уравнения типа (142) неоднократно встречались выше и, как нам уже известно, дают возможность построить в любом приближении асимптотические представления для решений системы (133) по Крылову — Боголюбову.

После нахождения на первом этапе коэффициентов асимптотических разложений A_1, B_1 и $U_k^{(1)}(\tau, a, \xi, \theta)$ $(k=1, \ldots, N)$ асимптотическое решение системы (133) в первом приближении имеет вид

$$x_k(t) = \varphi_k^{(1)}(\tau)\, a(t, \mu) \cos(p\theta(\tau)/q + \psi(t, \mu)), \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{2.143}$$

где величины a и ψ определяются из системы амплитудно-фазовых уравнений первого приближения

$$\frac{da}{dt} = \mu A_1(\tau, a, \psi), \qquad \frac{d\psi}{dt} = \omega_1(\tau) - \frac{p\nu(\tau)}{q} + \mu B_1(\tau, a, \psi). \tag{2.144}$$

Уравнения, определяющие функции A_1 и B_1, выводятся с помощью методики асимптотических разложений, многократно изложенной в первых параграфах этой главы. Они имеют вид

$$\left[\omega_1(\tau) - \frac{p\nu(\tau)}{q}\right]\frac{\partial A_1}{\partial\psi} - 2a\omega_1(\tau) B_1 =$$
$$= \frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp\{isq\psi\} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{N} Q_{k0}\varphi_k^{(1)}(\tau) \exp\{-isq\psi\} \cos\xi\, d\theta\, d\xi,$$
$$\left[\omega_1(\tau) - \frac{p\nu(\tau)}{q}\right] a\frac{\partial B_1}{\partial\psi} + 2\omega_1(\tau) A_1 = -\frac{a}{m_1(\tau)} \frac{d[m_1(\tau)\,\omega_1(\tau)]}{d\tau} -$$
$$- \frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp\{isq\psi\} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{N} Q_{k0}\varphi_k^{(1)}(\tau) \exp\{-isq\psi\} \sin\xi\, d\theta\, d\xi. \tag{2.145}$$

В уравнениях (145)

$$m_1(\tau) = \sum_{k,s=1}^{N} a_{ks}(\tau)\, \varphi_k^{(1)}(\tau)\, \varphi_s^{(1)}(\tau) = 2T\left(\varphi^{(1)}(\tau)\right) \tag{2.146}$$

представляет собой удвоенную кинетическую энергию невозмущенной системы, в которой обобщенные скорости $\dot{x}_k$, $\dot{x}_s$ заменены на нормальные функции $\varphi_k^{(1)}(\tau)$, $\varphi_s^{(1)}(\tau)$, а силы Q_k заменяются приближенными значениями

$$Q_{k0} = Q_k\left[\tau, a, \varphi_1^{(1)}(\tau)\, a\cos\xi, \ldots, \varphi_N^{(1)}(\tau)\, a\cos\xi,\right.$$
$$\left. -\varphi_1^{(1)}(\tau)\, a\omega_1(\tau)\sin\xi, \ldots, -\varphi_N^{(1)}(\tau)\, a\omega_1(\tau)\sin\xi\right], \qquad k = 1, \ldots, N. \tag{2.147}$$

Функции A_1 и B_1 можно искать в виде частного 2π-периодического по ψ решения системы (145)

$$A_1(\tau, a, \psi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{1s}^*(\tau, a)\exp\{isq\psi\}, \tag{2.148}$$

$$B_1(\tau, a, \psi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_{1s}^*(\tau, a)\exp\{isq\psi\}, \tag{2.149}$$

применяя метод неопределенных коэффициентов. После ряда несложных выкладок находим

$$\begin{aligned} A_1(\tau, a, \psi) &= \\ &= -\frac{a}{2m_1(\tau)\,\omega_1(\tau)}\frac{d[m_1(\tau)\omega_1(\tau)]}{d\tau} + \frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{\exp\{isq\psi\}}{4\omega_1^2(\tau)-[q\omega_1(\tau)-p\nu(\tau)]^2 s^2}\times \\ &\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{N} Q_{k0}\varphi_k^{(1)}(\tau)\exp\{-isq\psi\}\{[q\omega_1(\tau)-p\nu(\tau)]\,is\cos\xi - \\ &\qquad - 2\omega_1(\tau)\sin\xi\}\,d\theta\,d\xi, \end{aligned} \tag{2.150}$$

$$\begin{aligned} B_1(\tau, a, \psi) &= -\frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{\exp\{isq\psi\}}{4\omega_1^2(\tau)-[q\omega_1(\tau)-p\nu(\tau)]^2 s^2}\times \\ &\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{N} Q_{k0}\varphi_k^{(1)}(\tau)\exp\{-isq\psi\}\{[q\omega_1(\tau)-p\nu(\tau)]\,is\sin\xi + \\ &\qquad + 2\omega_1(\tau)\cos\xi\}\,d\theta\,d\xi. \end{aligned} \tag{2.151}$$

Таким образом, с помощью метода асимптотических разложений мы нашли выражения (150) и (151) для A_1 и B_1, т. е. построили амплитудно-фазовые уравнения (144) первого приближения, которые в последующем надлежит решить. Естественно, чтобы получить конкретные выражения для функций $a(t, \mu)$ и $\psi(t, \mu)$, следует задать конкретные аналитические формулы для обобщенных сил Q_{k0} (147). Подставляя далее функции a, ψ в формулы (143), мы получаем первое приближение для решения первоначальной возмущенной системы (133). Изложенная методика может быть применена для построения высших приближений к решению системы (133). Например, для построения второго приближения вместо уравнений (144) следует рассматривать систему

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu A_1(\tau, a, \psi) + \mu^2 A_2(\tau, a, \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1(\tau) - \frac{p\nu(\tau)}{q} + \mu B_1(\tau, a, \psi) + \mu^2 B_2(\tau, a, \psi), \end{aligned} \tag{2.152}$$

а для функций A_2, B_2 необходимо выписать уравнения в частных производных вида (145) (заметим, что левые части уравнения (145) остаются без изменений). После определения функций A_1, A_2, B_1, B_2 и их подстановки в уравнения (152) можно найти второе приближение для функций $a(t, \mu)$, $\psi(t, \mu)$ и, следовательно, можно построить второе приближение (с точностью до μ^2) для решения возмущенной системы (133).

В заключение сделаем два замечания.

Замечание 1. Построенные приближенные решения системы (133) близки к одночастотным колебаниям с медленно изменяющейся частотой $\omega_1(\tau)$. В принципе изложенная методика применима и к отысканию других одночастотных решений, если условие 1) справедливо для других частот.

Замечание 2. Наличие внутренних резонансов (имеет место условие $r\omega_1(\tau) \approx s\omega_k(\tau)$, где r, s — взаимно простые числа, а индекс k принимает по крайней мере одно из значений 2, ..., N) существенно осложняет построение приближенных решений системы (133). В этом случае изложенная методика может оказаться неэффективной. Задача становится, по существу, многочастотной и резонансной.

ГЛАВА III

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМАХ

Исследование многочастотных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода усреднения имеет длительную историю. Вместе с тем только в последние два десятилетия математикам удалось решить принципиальные вопросы применимости и обоснования метода сглаживания, хотя его формальное применение к многочастотным задачам небесной механики восходит еще к Гауссу. Трудности, которые возникают здесь при создании математической теории, состоят в том, что в процессе динамической эволюции механической или какой-либо другой системы траектория (решение) может пройти через резонансные точки или их малые окрестности, и в этом случае теоремы, приведенные в гл. I, неприменимы. Для резонансных систем приходится строить новые оценки для отклонений решений усредненных уравнений и первоначальных уравнений, а также оценки для интервалов времени, на которых рассматривается ε-близость указанных решений. Этим вопросам уделим в этой главе основное внимание.

§ 3.1. Классификация частотных резонансов

Поведение решений многочастотных систем зависит не только от того, имеются или отсутствуют частотные резонансы вдоль траектории, определяемой многочастотной системой дифференциальных уравнений вида (1.90), но и от того, какова норма целочисленного вектора k^*, для которого выполняется резонансное соотношение вида $(k^*, \omega) \approx 0$. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые определения [21, 85].

Пусть при некотором заданном наборе частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$ и некотором целочисленном векторе $k^* = (k_1^*, \ldots, k_n^*)$ выполняется равенство

$$|(k^*, \omega)| = \alpha, \tag{3.1}$$

где α — некоторая достаточно малая неотрицательная величина, малость которой в каждой задаче должна быть оговорена. Например, выбор величины α в задачах небесной механики обсуждается в книге [21]. Если в данной задаче величина α считается малой, то (k^*, ω) будем называть *α-резонансом* частот. В частности, точный нуль-резонанс получается при $\alpha = 0$.

Порядком α-резонанса назовем число (норму)

$$\|k^*\| = \sum_{s=1}^{n} |k_s^*|. \tag{3.2}$$

Пусть существуют α-резонансы с различными целочисленными векторами $k^{(1)}, \ldots, k^{(s)}, \ldots$ Будем называть α-резонанс $(k^{(r)}, \omega)$ *резонансом низшего порядка* по сравнению с α-резонансом $(k^{(s)}, \omega)$, если $\|k^{(r)}\| < \|k^{(s)}\|$. И наоборот, α-резонанс $(k^{(s)}, \omega)$ является резонансом *высшего порядка* по сравнению с $(k^{(r)}, \omega)$.

Если $\|k^{(r)}\| = \|k^{(s)}\|$, то будем говорить о резонансах *одинакового порядка.*

α-резонанс $(k^{(r)}, \omega)$ назовем *резонансом наинизшего порядка* по сравнению со всеми остальными α-резонансами, если

$$\|k^{(r)}\| = \inf_{s \geqslant 1} \|k^{(s)}\|. \tag{3.3}$$

Если для данного набора частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рассматривать всевозможные скалярные произведения (k, ω), для которых $\|k\| = 1, 2, \ldots$, то очевидно, что они удовлетворяют одному из следующих неравенств:

$$|(k, \omega)| \leqslant \alpha, \tag{3.4}$$

$$|(k, \omega)| > \alpha. \tag{3.5}$$

Отрезок $[-\alpha, \alpha]$ будем называть *α-резонансной полосой* или *α-резонансной зоной.*

В асимптотической теории дифференциальных уравнений большую роль играют при малых α неравенства вида (4), так как они порождают в асимптотических представлениях решений так называемые малые знаменатели [8, 12, 17, 31].

При интегрировании периодических или условно-периодических функций, представленных кратными рядами Фурье, изменение амплитуд отдельных гармоник зависит от двух факторов: от малости величины α, характеризующей резонанс частот, и от нормы целочисленного вектора k, присутствующего в резонансных соотношениях. Поясним это на примере.

Пусть в области G_n задана p раз дифференцируемая функция $f(y)$, зависящая от n аргументов $y_1, \ldots, y_n$. Тогда ее фурье-представление имеет вид n-кратного ряда

$$f(y) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} f_k \exp\{i(k, y)\}, \tag{3.6}$$

где

$$|f_k| \leqslant V_p / (\pi^n \|k\|^p), \tag{3.7}$$

V_p — полная вариация функции $\partial^p f / (\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n})$ в параллелепипеде периодов [10]. Для аналитической в $G_n = \{y : \|\operatorname{Im} y\| <$

$< \rho\}$ функции $f(y)$ имеем оценку [4, 12]

$$|f_k| \leqslant \exp\{-\|k\|\rho\} \sup_{y\in G_n} |f(y)|. \tag{3.8}$$

Допустим теперь, что

$$y = \omega t, \tag{3.9}$$

где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — некоторый числовой вектор. Такая линейная зависимость вектора y от времени t имеет место, например, при нахождении порождающего решения для многочастотных вращательных систем. После подстановки (9) в ряд Фурье (6) получим либо периодическую функцию t (в случае рациональной соизмеримости частот), либо условно-периодическую функцию (в случае несоизмеримости $\omega_1, \ldots, \omega_n$). Интегрируя по t, получим

$$\int_0^t f(\omega\tau)\,d\tau = a_0 + a_1 t + \sum_{\|k\|\geqslant 1}'' f_k \frac{\exp\{i(k,\omega)t\}}{i(k,\omega)}, \tag{3.10}$$

где штрихи у знака суммы означают, что индекс-вектор суммирования k принимает только нерезонансные значения, т. е. такие, для которых $(k, \omega) \neq 0$. Легко видеть, что

$$a_1 = f_0 + A, \tag{3.11}$$

где f_0 — свободный член ряда Фурье (6), а величина A появляется, лишь если имеются резонансные соотношения. Иными словами,

$$A = \sum_{\|k\|\geqslant 1}' f_k, \tag{3.12}$$

где k принимает лишь те значения, для которых $(k, \omega) = 0$.

В сумме (12) наибольшими слагаемыми будут те f_k, для которых норма $\|k\|$ является наименьшей (см. (7), (8)), т. е. в коэффициент векового члена наибольший вклад вносят резонансы низших порядков и особенно резонансы наинизших порядков (таких тоже может быть несколько, если число частот ω_k больше двух).

Таким образом, резонансные члены в рядах Фурье приводят к появлению дополнительных вековых слагаемых в интеграле (10) помимо «типичного» векового члена $f_0 t$, который присутствует, как правило, всегда (он отсутствует лишь в том случае, когда среднее значение $f(t)$ на периоде равно нулю).

Представление (10) указывает также на то, что амплитуда гармоники $\exp\{i(k, \omega)\ t\}$, равная $|f_k|/|(k, \omega)|$, зависит как от величины знаменателя (k, ω), так и от величины коэффициента Фурье f_k. При одном и том же значении $|(k, \omega)|$ та амплитуда окажется больше, для которой $|f_k|$ больше, а, следовательно, норма $\|k\|$ меньше, и наоборот.

Отсюда вытекает, что могут быть очень «острые» резонансы $(k, \omega) \approx 0$, но из-за большого значения $\|k\|$ их влияние на решение «не ощущается», так как оно «гасится» числом f_k. С другой стороны, не очень «острый» резонанс частот благодаря небольшому значению $\|k\|$ (а следовательно, и относительно большому значению f_k) может оказать на решение большее влияние. Мы имеем дело со сложным механизмом одновременного и возрастания амплитуд благодаря возможному появлению малых знаменателей в асимптотическом представлении решения, и их затухания с ростом $\|k\|$, который приводит, вообще говоря, к убыванию $|f_k|$.

Именно этот сложный механизм проявляется при построении практически любого варианта асимптотической теории возмущений для многочастотных систем дифференциальных уравнений.

§ 3.2. Геометрическая интерпретация решений многочастотных систем

Вернемся к порождающему решению (1.94)

$$x^{(0)} = x_0^{(0)} = \mathrm{const}, \qquad y^{(0)} = \omega\left(x_0^{(0)}\right) t + y_0^{(0)}$$

многомерной многочастотной автономной вращательной системы (1.90) с n-мерным вектором частот $\omega(x) = (\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x))$. Ему можно дать наглядную геометрическую интерпретацию, предложенную, по-видимому, впервые Пуанкаре.

Тором (n-мерным) называется поверхность, образующаяся в результате прямого произведения n окружностей $C_1 \times \ldots \times C_n$ (см. [86, 87]).

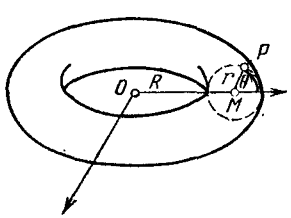

Рис. 5. Изображение двумерного тора с радиусами R и r. Точка P находится на поверхности тора

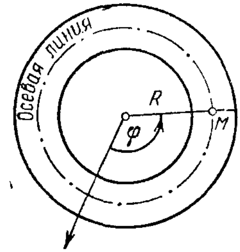

Рис. 6. «Горизонтальное» сечение двумерного тора

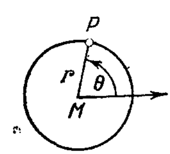

Рис. 7. «Поперечное» сечение двумерного тора

При $n = 2$ мы получаем двумерный тор, который представляет собой не что иное, как «бублик» (рис. 5). Если обозначить через R, r радиусы окружностей C_1 и C_2, то в двумерном торе $C_1 \times C_2$ радиус R определяет размеры его «горизонтального» сечения (рис. 6), r — размеры «поперечного» сечения (рис. 7).

Положение любой точки P на поверхности двумерного тора определяется двумя углами (долготой и широтой точки). На поверхности n-мерного тора положение любой точки P определяется n координатами-углами. Пусть теперь в системе (1.90) число m медленных переменных x совпадает с числом n быстрых переменных y, т. е. $m=n$. Тогда решение (1.94) можно представить как траекторию на n-мерном торе. Величины $|x_1^{(0)}|, \ldots, |x_n^{(0)}|$ (будем считать, что начальные значения $x_k^{(0)}$ отличны от нуля) можно рассматривать как радиусы n окружностей $C_1, \ldots, C_n$; следовательно, произведение $C_1 \times \ldots \times C_n$ определяет n-мерный тор. На этом торе введем n угловых координат $y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$, изменяющихся, согласно (1.94), линейным образом по t. Траектория $y^{(0)}(t) = \omega(x^{(0)})\,t + y_0^{(0)}$ «обматывает» тор, причем в зависимости от арифметических свойств вектора частот $\omega(x^{(0)})$ обмотка тора может быть всюду плотной (если частоты $\omega_1(x^{(0)}), \ldots, \omega_n(x^{(0)})$ рационально не соизмеримы), или она «замкнется» после определенного количества оборотов (если частоты $\omega_1(x^{(0)}), \ldots, \omega_n(x^{(0)})$ рационально соизмеримы).

Таким образом, в зависимости от арифметических свойств вектора частот $\omega(x)$ траектория на торе может быть представлена периодической функцией (если имеется резонанс частот) или условно-периодической функцией с n частотами.

Приведенные соображения справедливы, если однажды вычисленные частоты $\omega_1(x^{(0)}), \ldots, \omega_n(x^{(0)})$ в дальнейшем остаются постоянными, как это имеет место для порождающего решения (1.94). Если же предположить, что $x(t, \mu)$ — медленно изменяющая функция времени, то логически возможны такие варианты, когда резонансные и нерезонансные ситуации могут чередоваться, и, следовательно, некоторые участки траектории точки на торе будут периодическими, а другие — условно-периодическими функциями времени.

Например, пусть имеется гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}, \tag{3.13}$$

где x есть n-мерный вектор импульсов, y — n-мерный вектор обобщенных координат, а гамильтониан имеет вид

$$H(x, y, \mu) = H_0(x, y) + \mu H_1(x, y, \mu). \tag{3.14}$$

«Невозмущенный» гамильтониан $H_0(x, y)$ задается равенством

$$H_0(x, y) = m + \sum_{s=1}^{n} \omega_s x_s + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{s=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} \Phi_{sj}(y_3, \ldots, y_n)\, x_s x_j, \tag{3.15}$$

где m — постоянная величина.

В представлении (15) будем считать, что a_{11}, a_{12}, a_{22} являются положительными постоянными числами, а $\Phi_{sj}(y_3, \ldots, y_n)$ не зависят от y_1, y_2.

Гамильтонова система для невозмущенной (при $\mu = 0$) задачи записывается в таком виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_1^{(0)}}{dt} \equiv -\frac{\partial H_0}{\partial y_1^{(0)}} = 0, \qquad \frac{dx_2^{(0)}}{dt} \equiv -\frac{\partial H_0}{\partial y_2^{(0)}} = 0,\\
&\frac{dx_k^{(0)}}{dt} \equiv -\frac{\partial H_0}{\partial y_k^{(0)}} = -\frac{1}{2}\sum_{s=3}^{n}\sum_{j=3}^{n}\frac{\partial \Phi_{sj}}{\partial y_k^{(0)}} x_s^{(0)} x_j^{(0)},\\
&\frac{dy_1^{(0)}}{dt} \equiv \frac{\partial H_0}{\partial x_1^{(0)}} = \omega_1 + 2a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)},\\
&\frac{dy_2^{(0)}}{dt} \equiv \frac{\partial H_0}{\partial x_2^{(0)}} = \omega_2 + a_{12}x_1^{(0)} + 2a_{22}x_2^{(0)},\\
&\frac{dy_k^{(0)}}{dt} \equiv \frac{\partial H_0}{\partial x_k^{(0)}} = \omega_k + \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n}\Phi_{kj}x_j^{(0)}, \qquad k = 3, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

В этом параграфе через k обозначен индекс-скаляр. Очевидно, что система (16) допускает частное решение

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(0)} = R_1, \quad x_2^{(0)} = R_2, \quad x_k^{(0)} = 0,\\
&y_1^{(0)} = (\omega_1 + 2a_{11}R_1 + a_{12}R_2)\,t + y_{1,0}^{(0)},\\
&y_2^{(0)} = (\omega_2 + a_{12}R_1 + 2a_{22}R_2)\,t + y_{2,0}^{(0)},\\
&y_k^{(0)} = \omega_k t + y_{k,0}^{(0)}.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

При $R_1 = R_2 = 0$ частное решение (17) совпадает с порождающим решением

$$
x^{(0)} = 0, \quad y^{(0)} = \omega t + y_0^{(0)}. \tag{3.18}
$$

Если $x_1^{(0)} = R_1$, $x_2^{(0)} = R_2$, $x_k^{(0)} = 0$ $(k = 3, \ldots, n)$ и $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ являются радиусами окружностей соответственно C_1 и C_2, то $C_1 \times C_2$ представляет собой двумерный тор в $n+1$-мерном пространстве, или n-мерный тор, у которого только два сечения суть окружности с отличными от нуля радиусами. Если к тому же и $R_2 = 0$, то мы получаем одномерный тор, т. е. обычную окружность с радиусом R_1 в $n+1$-мерном пространстве. При $n = 2$ решение (17) можно трактовать как движение точки на поверхности тора с долготой $y_1^{(0)}(t)$ и широтой $y_2^{(0)}(t)$, являющимися линейными функциями времени. Если частоты $\omega_1 + 2a_{11}R_1 + a_{12}R_2$ и $\omega_2 + a_{12}R_1 + 2a_{22}R_2$ рационально не соизмеримы, т. е. $(\omega_1 + 2a_{11}R_1 + a_{12}R_2)/(\omega_2 + a_{12}R_1 + 2a_{22}R_2) \neq r/s$ (r, s — целые числа), то траектория не замыкается на торе и мы получаем всюду плотную обмотку тора (рис. 8). В этом случае решение (17) невозмущенной гамильтоновой системы описывает условно-периодическое движение точки на торе с двумя частотами. Если указанные частоты рационально соизмеримы (имеет место резонанс частот), то после r оборотов по долготе и s оборотов по широте траектория точки на торе замкнется и мы получаем периодическое движение на торе.

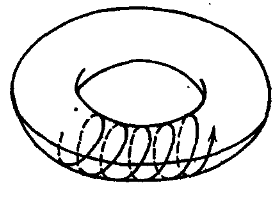

Рис. 8. Обмотка двумерного тора

Что же произойдет с описанной геометрической конструкцией, если к невозмущенному гамильтониану H_0 добавить возмущение μH_1?

Для наглядности рассмотрим простейший пример:

$$\mu H_1 = -\mu \cos y_1. \tag{3.19}$$

Тогда явный вид системы с гамильтонианом $H = H_0 - \mu \cos y_1$ будет следующим:

$$\begin{gathered}
\frac{dx_1}{dt} = -\mu \sin y_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0, \\
\frac{dx_k}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{s=3}^{n} \sum_{j=3}^{n} \frac{\partial \Phi_{sj}}{\partial y_k} x_s x_j, \\
\frac{dy_1}{dt} = \omega_1 + 2a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = \omega_2 + a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2, \\
\frac{dy_k}{dt} = \omega_k + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{n} \Phi_{kj} x_j, \quad k = 3, \ldots, n.
\end{gathered} \tag{3.20}$$

Присоединим к этим уравнениям начальные условия

$$x_1(0) = R_1, \quad x_2(0) = R_2, \quad x_k^{(0)} = 0, \quad y_s(0) = 0, \quad k = 3, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{3.21}$$

Система дифференциальных уравнений (20) с начальными условиями (21) может быть точно проинтегрирована, и ее частное решение выражается формулами

$$\begin{gathered}
x_1(t) = R_1 - (\omega_1 + 2a_{11}R_1 + a_{12}R_2)(1 - \mathrm{dn}\, u)/(2a_{11}), \\
x_2(t) = R_2 - (\omega_2 + a_{12}R_1 + 2a_{22}R_2)(1 - \mathrm{dn}\, v)/a_{12}, \\
x_k(t) = 0, \quad y_1(t) = 2\,\mathrm{am}\, u, \quad y_2(t) = 2\,\mathrm{am}\, v, \quad y_k(t) = \omega_k t, \\
u = (\omega_1 + 2a_{11}R_1 + a_{12}R_2)\, t/(2a_{11}), \\
v = (\omega_2 + a_{12}R_1 + 2a_{22}R_2)\, t/a_{12}, \quad k = 3, \ldots, n.
\end{gathered} \tag{3.22}$$

В равенства (22) входят эллиптические функции Якоби [7] $\operatorname{am} u$, $\operatorname{dn} u$ с модулем $\varkappa_1 = 2\sqrt{2a_{11}\mu}/(\omega_1 + 2a_{11}R_1 + a_{12}R_2)$ и функции $\operatorname{am} v$, $\operatorname{dn} v$ с модулем $\varkappa_2 = 2\sqrt{a_{12}\mu}/(\omega_2 + a_{12}R_1 + 2a_{22}R_2)$.

Известно, что $\operatorname{dn} z$ является периодической функцией, поэтому $x_1(t)$, $x_2(t)$ также будут периодическими. Функции $\operatorname{am} u$ и $\operatorname{am} v$ являются «почти» линейными (с точностью до μ) функциями времени, поэтому $y_1(t)$, $y_2(t)$ изменяются почти линейно. В пространстве переменных x, y движение точки изображается траекторией на периодически «пульсирующем» торе, при этом $n-2$ угловых координат $y_3(t), \ldots, y_n(t)$ являются линейными функциями времени, а две угловые координаты $y_1(t)$, $y_2(t)$ — почти линейными функциями времени.

Интересны приближенные (с точностью до μ) формулы для движения на торе:

$$\begin{gathered} x_1(t) \approx R_1 + \mu(\omega_1 + 2a_{11}R_1 + a_{12}R_2)t^2/2, \\ x_2(t) \approx R_2 + \mu(\omega_2 + a_{12}R_1 + 2a_{22}R_2)t^2/2, \quad x_k(t) = 0, \quad k = 3, \ldots, n; \end{gathered} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &\approx (\omega_1 + 2a_{11}R_1 + a_{12}R_2)(t - a_{11}\mu t^3/3), \\ y_2(t) &\approx (\omega_2 + a_{12}R_1 + 2a_{22}R_2)(t - a_{12}\mu t^3/6), \\ y_k(t) &= \omega_k t, \quad k = 3, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Таким образом, решение многочастотной системы с медленными и быстрыми переменными может быть интерпретировано как движение точки на торе, размерность которого совпадает с размерностью n вектора быстрых переменных y, а сам тор является медленно изменяющейся поверхностью, которая по истечении большого промежутка времени может, вообще говоря, стать вовсе не похожей на привычный нам тор.

§ 3.3. Системы уравнений Ван-дер-Поля

Изучим математическую модель

$$\begin{gathered} d^2x_k/dt^2 + \omega_k^2 x_k = \mu f_k(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n), \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad k = 1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{3.25}$$

где $f_k(x, \dot{x})$ — аналитические функции переменных x, $\dot{x}$ в $2n$-мерном открытом шаре радиуса R:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + \dot{x}_k^2) < R^2. \tag{3.26}$$

Здесь k также является индексом-скаляром.

Ее частным случаем являются автономные и неавтономные осцилляторы Ван-дер-Поля, рассмотренные в гл. II. Будем называть систему (25) *системой Ван-дер-Поля.*

К одномерному уравнению вида

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = \mu f(x, t), \qquad (3.27)$$

где $f(x, t)$ — аналитическая по x и периодическая по t функция, метод асимптотических рядов без вековых членов, по-видимому, впервые применил Линдштедт [88]. Идеи Линдштедта и предложенная им аналитическая форма решения были обобщены и развиты для случая гамильтоновых систем Пуанкаре [12]. Как и раньше, постоянные величины ω_k будем называть основными (или собственными) частотами, чтобы отличать их от частот, принадлежащих частотному спектру самих функций f_k.

В отличие от одномерного уравнения Ван-дер-Поля, здесь могут иметь место резонансные соотношения между частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$. При $\mu = 0$ порождающая система для (25) состоит из n отдельных уравнений 2-го порядка

$$d^2x_k^{(0)}/dt^2 + \omega_k^2 x_k^{(0)} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n, \qquad (3.28)$$

общее решение которой выражается известными формулами

$$x_k^{(0)}(t) = A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t, \quad k = 1, \ldots, n, \qquad (3.29)$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные. Каждая функция $x_k^{(0)}(t)$ является периодической функцией t с периодом $2\pi\omega_k^{-1}$, но общее решение (29) может быть как периодической, так и условно-периодической вектор-функцией времени t [86, 89], и его характер определяется арифметическими свойствами вектора частот ω. К решению (29) полностью применима геометрическая интерпретация, изложенная в предыдущем параграфе.

Пусть частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рационально соизмеримы при векторе r^*, у которого все компоненты отличны от нуля. В этом случае мы имеем по меньшей мере одно резонансное соотношение между основными частотами. Этот резонанс назовем простейшим; в силу неизменяемости частот он сохраняется для любого значения t. В таком случае общее решение (29) системы (28) является периодической функцией t. Если частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рационально несоизмеримы, то решение (29) описывается условно-периодической вектор-функцией с n частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Таким образом, порождающая система (28) описывает периодическое или условно-периодическое движение точки в $n+1$-мерном пространстве (прямое произведение n-мерного конфигурационного пространства $x_1, \ldots, x_n$ на одномерное временно́е пространство t). Ставится вопрос об исследовании движения точки, определяемого системой Ван-дер-Поля (25), в которой μf_k можно трактовать как малые возмущающие силы.

Для получения упрощенной системы, подобно Ван-дер-Полю, введем вместо $2n$ неизвестных функций x_k, $\dot{x}_k$ новые переменные

u_k, v_k по формулам

$$x_k = u_k \sin \omega_k t - v_k \cos \omega_k t, \quad \dot{x}_k = \omega_k (u_k \cos \omega_k t + v_k \sin \omega_k t). \quad (3.30)$$

Второе равенство означает, что на переменные u_k, v_k наложены условия

$$\frac{du_k}{dt} \sin \omega_k t - \frac{dv_k}{dt} \cos \omega_k t = 0, \quad v_k(0) = -x_k(0), \quad u_k(0) = \frac{\dot{x}_k(0)}{\omega_k}. \tag{3.31}$$

С помощью новых функций систему (25) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{du_k}{dt} &= \mu \bar{\varphi}_k(u, v) + \mu \sum_{\|r\| \geqslant 1} \varphi_k^{(r)}(u, v) \exp\{i(r, \omega) t\}, \\ \frac{dv_k}{dt} &= \mu \bar{\psi}_k(u, v) + \mu \sum_{\|r\| \geqslant 1} \psi_k^{(r)}(u, v) \exp\{i(r, \omega) t\}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

где $\bar{\varphi}_k(u, v)$, $\bar{\psi}_k(u, v)$, $\varphi_k^{(r)}(u, v)$, $\psi_k^{(r)}(u, v)$ — аналитические функции переменных u, v в шаре

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k^2 + v_k^2) < R^2.$$

Если ввести $2n$-мерные векторы

$$z = (u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n), \quad \bar{z} = (\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n; \bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_n),$$

$$Z = \left(\bar{\varphi}_1 + \sum_{\|r\| \geqslant 1} \varphi_1^{(r)} \exp\{i(r, \omega) t\}, \ldots, \bar{\psi}_n + \sum_{\|r\| \geqslant 1} \psi_n^{(r)} \exp\{i(r, \omega) t\}\right),$$

то система (32) приводится к стандартному виду по Н. Н. Боголюбову

$$dz/dt = \mu Z(z, t), \quad z(0) = z_0. \tag{3.33}$$

Соответствующая ей система сравнения запишется в виде

$$d\bar{z}/dt = \mu \bar{Z}(\bar{z}), \quad \bar{z}(0) = z_0, \tag{3.34}$$

где

$$\bar{Z}(\bar{z}) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z(z, t)\, dt.$$

К системам (33) и (34) применим в полном объеме асимптотический метод, изложенный в § 1.5, и, следовательно, можно построить асимптотическое представление для решения $z(t, \mu)$ и оценить ε-малость $\|z(t, \mu) - \bar{z}(t, \mu)\|$ с помощью теоремы Н. Н. Боголюбова. Для построения решения системы (33) можно применить итерационный метод, предложенный в работе [90]:

$$z_1(t, \mu) = z_0 + \mu \int_0^t Z(\bar{z}(\tau, \mu), \tau)\, d\tau,$$

$$z_k(t, \mu) = z_0 + \mu \int_0^t Z(z_{k-1}(\tau, \mu), \tau)\, d\tau, \quad k = 2, 3, \ldots$$

В отличие от классического метода последовательных приближений здесь для получения первого приближения необходимо знать решение усредненной системы (34) $\bar{z}(t, \mu)$, что усложняет реализацию итераций. С другой стороны, этот итерационный метод имеет лучшие свойства сходимости [90].

Можно также искать решение системы (25) в виде

$$x_k(t) = a_k(t)\cos(\omega_k t + \varphi_k(t)), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.35}$$

и в этом случае условия (31) запишутся с помощью равенств

$$\frac{da_k}{dt}\cos(\omega_k t + \varphi_k) - \frac{d\varphi_k}{dt} a_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) = 0,$$

$$a_k(0)\cos\varphi_k(0) = x_k^{(0)}, \quad -a_k(0)\,\omega_k \sin\varphi_k(0) = \dot{x}_k^{(0)}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

С учетом этих условий имеем

$$dx_k/dt = -a_k(t)\,\omega_k \sin(\omega_k t + \varphi_k(t)), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.36}$$

Так как при $\mu = 0$ амплитуды и фазы колебаний суть постоянные величины, формулы (35) дают решение с медленно изменяющимися амплитудами и фазами. Соотношения (35) и (36) составляют преобразование Ван-дер-Поля [57].

Один из первых в хронологическом порядке вариантов асимптотической теории для уравнения типа Ван-дер-Поля основан на замене переменных вида

$$x = a\cos\psi + \mu u_1(a, \psi) + \mu^2 u_2(a, \psi) + \ldots, \quad \psi = \omega t + \varphi, \tag{3.37}$$

с 2π-периодическими по ψ функциями $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi)$, ... для отыскания решения уравнения

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}). \tag{3.38}$$

Величины a, ψ как функции времени определяются в результате решения дифференциальных уравнений

$$da/dt = \mu A_1(a) + \mu^2 A_2(a) + \ldots,$$
$$d\psi/dt = \omega + \mu B_1(a) + \mu^2 B_2(a) + \ldots \tag{3.39}$$

Функции $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi)$, ..., $A_1(a)$, ..., $B_1(a)$, ... должны выбираться таким образом, чтобы выражение (37) после подстановки в него решения $a(t, \mu)$, $\psi(t, \mu)$ системы (39) оказалось бы решением уравнения (38). Замена (37) и уравнения (39) были впервые приведены в известной монографии Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [26].

Именно преобразование (37) находится у истоков асимптотической теории дифференциальных уравнений, использующей метод усреднения как средство сглаживания колебательных функций.

Справедливость ε-оценки для нормы $\|z(t, \mu)-\bar{z}(t, \mu)\|$ для системы Ван-дер-Поля устанавливает

Теорема 3.1 (Е. А. Гребеников [17]). *Пусть*:

1) *вектор-функция* $Z(z, t)$ *непрерывна вместе со своей производной по* z *в области* G_{2n+1}, *являющейся прямым произведением* $2n$-*мерного открытого шара* D_{2n} *на* $\mathbf{R}_1=(-\infty, \infty)$, *и ее евклидова норма удовлетворяет относительно* $z\in D_{2n}$ *условию Липшица с постоянной* L:

$$\|Z(z', t)-Z(z'', t)\|<L\|z'-z''\|; \qquad (3.40)$$

2) $Z(z, t)$ *является периодической функцией* $t\in(-\infty, \infty)$, *характеризуемой частотами* $\omega_k=\lambda p_k q_k^{-1}$ (λ — *любое вещественное положительное число*, p_k, q_k — *взаимно простые целые числа*, $k=1, \ldots, n$), *или условно-периодической функцией* t, *состоящей из конечного числа гармоник*;

3) $$\|Z\|<K, \quad \|\partial Z/\partial z\|<K; \qquad (3.41)$$

4) $\bar{z}(t, \mu)\in D_{2n}$ *при* $t\in(-\infty, \infty)$ *вместе со своей* ρ-*окрестностью*.

Тогда для любых $\varepsilon>0$ *и* $A>0$ *существует* $\mu_0(\varepsilon, A, \rho)>0$ *такое, что при* $0\leqslant\mu<\mu_0$ *и* $0\leqslant t\leqslant A\mu^{-1}$ *имеет место оценка* $\|z(t, \mu)-\bar{z}(t, \mu)\|<\varepsilon$, *если* $z(0, \mu)=\bar{z}(0, \mu)$.

В [17] можно найти также теорему, в которой условие 2) заменено на условие Зигеля [91]: почти все (в смысле меры Лебега [92]) точки ω n-мерного единичного куба удовлетворяют оценке

$$|(r, \omega)|>R(\omega)/\|r\|^{n+1}, \qquad (3.42)$$

где $R(\omega)$ — величина, зависящая только от ω. Неравенство (42) говорит о том, что все точки, принадлежащие единичному кубу и имеющие рациональные координаты, а также те точки, координаты которых удовлетворяют противоположному (42) неравенству, образуют счетное множество.

§ 3.4. Многочастотные автономные вращательные системы с резонансом начальных частот

Вернемся к многочастотной системе (1.90)

$$dx/dt=\mu X(x, y, \mu), \quad dy/dt=\omega(x)+\mu Y(x, y, \mu),$$

в которой вектор-функции X, Y представляются в области $G_{m+n}=$

$=\{(x, y): x \in P_m, y \in Q_n\}$ n-кратными рядами Фурье (1.91):

$$X(x, y, \mu) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} X_k(x, \mu) \exp\{i(k, y)\},$$
$$Y(x, y, \mu) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} Y_k(x, \mu) \exp\{i(k, y)\}.$$

Применяя к системе (1.90) замену переменных $(x, y) \to (p, q)$:

$$p = x - x_0, \quad q = y - \omega_0 t - y_0, \tag{3.43}$$

где $\omega_0 = \omega(x_0)$, получим эквивалентную (1.90) систему

$$\begin{aligned} dp/dt &= \mu X(p + x_0, q + \omega_0 t + y_0, \beta), \\ dq/dt &= \omega(p + x_0) - \omega_0 + \mu Y(p + x_0, q + \omega_0 t + y_0, \beta), \end{aligned} \tag{3.44}$$

где

$$\begin{aligned} X(p + x_0, q + \omega_0 t + y_0, \beta) &= \\ &= \sum_{\|k\| \geqslant 0} X_k(p + x_0, \beta) \exp\{i(k, q + \omega_0 t + y_0)\}, \\ Y(p + x_0, q + \omega_0 t + y_0, \beta) &= \\ &= \sum_{\|k\| \geqslant 0} Y_k(p + x_0, \beta) \exp\{i(k, q + \omega_0 t + y_0)\}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Параметр β, как и раньше, означает малый параметр μ, играющий роль одного из аргументов функций X, Y.

Пусть начальный вектор частот ω_0 удовлетворяет для некоторых векторов k с отличной от нуля нормой условию резонанса

$$(k, \omega_0) = 0. \tag{3.46}$$

В этом случае операторы усреднения по быстрым переменным y и по времени t (см. §§ 1.1, 1.4), примененные к правым частям системы (1.90), приводят к различным значениям для сглаженных функций $\bar{X}$, $\bar{Y}$, и в силу этого правомерным является вопрос о построении для (1.90) двух вариантов асимптотической теории возмущений, использующих на первом шаге операторы усреднения M_y и M_t. Но сначала следует применить к уравнениям (44) алгоритм усечения правых частей, т. е. написать усеченную систему

$$\begin{aligned} dp/dt &= \mu X_N(p + x_0, q + \omega_0 t + y_0, \beta), \\ dq/dt &= \omega(p + x_0) - \omega_0 + \mu Y_N(p + x_0, q + \omega_0 + y_0, \beta), \end{aligned} \tag{3.47}$$

где

$$\begin{aligned} X_N &= \sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N} X_k(p + x_0, \beta) \exp\{i(k, q + \omega_0 t + y_0)\}, \\ Y_N &= \sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N} Y_k(p + x_0, \beta) \exp\{i(k, q + \omega_0 t + y_0)\}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Алгоритм выбора числа N будет описан ниже, а пока будем считать, что оно задано.

§ 3.5. Асимптотическая теория автономных резонансных вращательных систем, использующая усреднение по быстрым переменным

В этом случае

$$M_y[X(x,\ y,\ \beta)]=X_0(x,\ \beta),\quad M_y[Y(x,\ y,\ \beta)]=Y_0(x,\ \beta). \tag{3.49}$$

Уравнения сравнения любого приближения, полученные с помощью оператора усреднения M_y, записываются в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{dt}&=\mu X_0(\bar{x},\ \beta)+\sum_{s\geqslant 2}\mu^s A_s(\bar{x},\ \beta),\\ \frac{d\bar{y}}{dt}&=\omega(\bar{x})+\mu Y_0(\bar{x},\ \beta)+\sum_{s\geqslant 2}\mu^s B_s(\bar{x},\ \beta).\end{aligned} \tag{1.118'}$$

Для преобразования системы (47) в (1.118′) следует воспользоваться заменой (1.121), а это значит, что уравнения в частных производных, определяющие функции $u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2,\ \ldots$, в точности совпадают с уравнениями (1.122)—(1.127). Однако их решение будет отличаться от приведенного в § 1.11. Действительно, уравнение (1.128) в этом случае может быть написано в виде

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial\bar{y}},\ \omega(\bar{x})\right)=\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}{}' X_k(\bar{x},\ \beta)\exp\{i(k,\ \bar{y})\}+\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}{}'' X_k(\bar{x},\ \beta)\exp\{i(k,\ \bar{y})\}, \tag{3.50}$$

где первая сумма включает члены, для которых $(k,\ \omega_0)=0$ (резонансные члены), вторая — нерезонансные члены. В практически нерезонансных системах, рассмотренных в § 1.11, первая сумма отсутствует.

Решение уравнения (50) из-за наличия первой суммы представляет собой сложную процедуру. Сначала допустим, что траектории системы (47) обладают свойством застревания в резонансной точке, т. е.

$$(k,\ \omega(\bar{x}))=0 \tag{3.51}$$

не только при $t=0$, но и при изменении t. В равенстве (51) вектор k принимает те же значения, что и в первой сумме из (50). Тогда общее решение уравнения (50) может быть записано в виде

$$u_1(\bar{x},\ \bar{y},\ \beta)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{y}_k}{\omega_k(\bar{x})}\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}{}' X_k(x,\ \beta)\exp\{i(k,\ \bar{y})\}+\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}{}''\frac{X_k(\bar{x},\ \beta)\exp\{i(k,\ \bar{y})\}}{i(k,\ \omega(\bar{x}))}+\varphi_1(\bar{x},\ \beta), \tag{3.52}$$

где $\varphi_1(\bar{x}, \beta)$ — произвольная дифференцируемая по $\bar{x}$ вектор-функция. Первое слагаемое в сумме (52) представляет собой вековой член, так как

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{y}_k}{\omega_k(\bar{x})} = t + \text{малая функция.} \tag{3.53}$$

Таким образом, если усреднение правых частей осуществляется с помощью оператора M_y и для некоторых векторов k выполняется резонансное соотношение (51), то в этом случае уже на первом шаге в преобразовании Крылова — Боголюбова появляются «неуничтожимые» вековые члены, и, следовательно, асимптотическая теория возмущений вращательных систем вида (1.90) в тригонометрической форме не может быть построена.

Теперь предположим, что резонансное соотношение (51) выполняется на дискретном множестве точек $\{\bar{x}_{\text{рез}}\}$. Тогда написать выражение для $u_1(\bar{x}, \bar{y}, \beta)$ в виде одной формулы не представляется возможным. В этом случае будем иметь

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}, \beta) = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\bar{y}_s}{\omega_s(\bar{x})}\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}{}' X_k(\bar{x}, \beta)\exp\{i(k, \bar{y})\} +$$
$$+\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}{}''\frac{X_k(\bar{x}, \beta)\exp\{i(k, \bar{y})\}}{i(k, \omega(\bar{x}))} + \varphi_1(\bar{x}, \beta), \qquad (k, \omega(\bar{x})) = 0, \tag{3.54}$$

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}, \beta) = \sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}\frac{X_k(\bar{x}, \beta)\exp\{i(k, \bar{y})\}}{i(k, \omega(\bar{x}))} + \varphi_1(\bar{x}, \beta), \tag{3.55}$$
$$(k, \omega(\bar{x}))\neq 0,$$

и, следовательно, для преобразования Крылова — Боголюбова будем иметь два вида выражений: один — для резонансного случая (формула (54)), которое содержит вековой член, другой — для нерезонансных точек (формула (55)). Двоякое выражение для функции $u_1(\bar{x}, \bar{y}, \beta)$ естественно порождает двоякое выражение для вектор-функции $v_1(\bar{x}, \bar{y}, \beta)$, определяемой уравнением в частных производных (1.123), в которое следует подставить выражения (54) и (55).

В первом случае получаем

$$v_1(\bar{x}, \bar{y}, \beta) = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\bar{y}_s}{\omega_s(\bar{x})}\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}{}' Y_k(\bar{x}, \beta)\exp\{i(k, \bar{y})\} +$$
$$+\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}{}''\frac{Y_k(\bar{x}, \beta)\exp\{i(k, \bar{y})\}}{i(k, \omega(\bar{x}))} + \frac{\bar{y}_1^3}{2n\omega_1(\bar{x})}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial\omega(\bar{x})}{\partial\bar{x}}, \left(\frac{1}{\omega_1(\bar{x})} + \sum_{s=2}^{n}\omega_s(\bar{x})\right)\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}{}' X_k(\bar{x}, \beta)\exp\{i(k, \bar{y})\}\right) +$$

$$+\frac{\bar{y}_1}{n\omega_1(\bar{x})}\left(\frac{\partial\omega(\bar{x})}{\partial\bar{x}},\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\bar{y}_s}{\omega_s(\bar{x})}-\frac{n\bar{y}_1}{\omega_1(\bar{x})}\right)\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}' X_k(\bar{x},\beta)\exp\{i(k,\bar{y})\}\right)+$$
$$+\frac{1}{\omega_1(\bar{x})}\left(\frac{\partial\omega(\bar{x})}{\partial\bar{x}},\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' X_k(\bar{x},\beta)\frac{\exp\{i(k,\bar{y})\}}{i^2(k,\omega(\bar{x}))^2}\right)+$$
$$+\frac{\bar{y}_1}{\omega_1(\bar{x})}\left(\frac{\partial\omega(\bar{x})}{\partial\bar{x}},\varphi_1(\bar{x},\beta)\right)+\psi_1(\bar{x},\beta). \quad (3.56)$$

Во втором случае

$$v_1(\bar{x},\bar{y},\beta)=\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}\frac{Y_k(\bar{x},\beta)\exp\{i(k,\bar{y})\}}{i(k,\omega(\bar{x}))}+$$
$$+\left(\frac{\partial\omega(\bar{x})}{\partial\bar{x}},\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}\frac{X_{k'}(\bar{x},\beta)\exp\{i(k,\bar{y})\}}{i^2(k,\omega(\bar{x}))^2}\right)+$$
$$+\frac{\bar{y}_1}{\omega_1(\bar{x})}\left(\frac{\partial\omega(\bar{x})}{\partial\bar{x}},\varphi_1(\bar{x},\beta)\right)+\psi_1(\bar{x},\beta). \quad (3.57)$$

Выражение (56) показывает, что уже в первом приближении в резонансном случае функция v_1 содержит вековой член вида t_2, так как $|\bar{y}_1/\omega_1(\bar{x})|\sim t$, а в нерезонансном случае v_1 содержит вековой член вида t, если $\varphi_1(\bar{x},\beta)\equiv 0$.

Таким образом, получаем два варианта асимптотической теории возмущений: один — для резонансного случая, второй — для нерезонансного случая.

Такой метод интегрирования может быть применен и к уравнениям в частных производных (1.124)—(1.127); в результате можно получить аналитические (правда, весьма громоздкие) выражения для функций второго приближения u_2, v_2 и т. д.

§ 3.6. Алгоритм сшивки резонансных и нерезонансных участков траекторий

Формулы (54)—(57) для функций u_1, v_1 указывают на то, что для приближенных решений первоначальной многочастотной системы (1.90) мы будем иметь различные аналитические представления для различных моментов времени. Нуждаются в особом рассмотрении формулы (1.147), представляющие как раз асимптотические разложения для решения первоначальной системы (47), если заменить в (1.147) переменные $\bar{x}$, $\bar{y}$ соответственно функциями $\bar{x}(t,\mu)$, $\bar{y}(t,\mu)$, являющимися решением сглаженной системы (1.118).

Разобьем временной отрезок $t\in[0,T]$, для которого строится асимптотическая теория, на два множества:

а) временно́е резонансное множество $I_{\text{рез}}(T)$, состоящее из таких временны́х «отрезочков», для которых

$$|(k, \omega(\bar{x}(t, \mu)))| \leqslant \alpha, \qquad t \in \left[t^{(k)}_{\text{л,рез}}, t^{(k)}_{\text{п,рез}}\right], \tag{3.58}$$

где α — ширина резонансной зоны, $t^{(k)}_{\text{л,рез}}$, $t^{(k)}_{\text{п,рез}}$ — левый и правый концы k-го резонансного отрезка;

б) временно́е нерезонансное множество $I_{\text{нер}}(T)$, состоящее из таких временны́х «отрезочков», для которых

$$|(k, \omega(\bar{x}(t, \mu)))| > \alpha, \qquad t \in \left[t^{(k)}_{\text{л,нер}}, t^{(k)}_{\text{п,нер}}\right], \tag{3.59}$$

где $t^{(k)}_{\text{л,нер}}$, $t^{(k)}_{\text{п,нер}}$ — левый и правый концы k-го нерезонансного отрезка $\left(t^{(k)}_{\text{л,нер}} = t^{(k)}_{\text{п,рез}}\right.$, так как первый «отрезочек» является резонансным); $(k, \omega_0) = 0$; $t^{(1)}_{\text{л,рез}} = 0$; $t^{(k)}_{\text{п,нер}} = t^{(k+1)}_{\text{л,рез}}$.

Очевидно, что

$$I_{\text{рез}}(T) \cup I_{\text{нер}}(T) = [0, T]. \tag{3.60}$$

Таким образом, на множестве $I_{\text{рез}}(T)$ асимптотическая теория возмущений представляется формулами с вековыми членами, т. е. формулами вида (54), а на множестве $I_{\text{нер}}(T)$ — формулами вида (55).

Чтобы оба варианта представляли решение $x(t, \mu, \beta)$, $y(t, \mu, \beta)$ системы (47), необходимо «сшить» эти выражения в точках $t^{(k+1)}_{\text{л,рез}} = t^{(k)}_{\text{п,нер}}$, $t^{(k)}_{\text{п,рез}} = t^{(k)}_{\text{л,нер}}$. Необходимо также «сшить» и выражения для производных dx/dt, dy/dt, так как правые части уравнений (47) являются непрерывными функциями. Для реализации сшивки необходимо удовлетворить $2(m+n)$ условиям вида

$$\begin{gathered}
x\left(t^{(k+1)}_{\text{л,рез}}, \mu, \beta\right) = x\left(t^{(k)}_{\text{п,нер}}, \mu, \beta\right),\\
y\left(t^{(k+1)}_{\text{л,рез}}, \mu, \beta\right) = y\left(t^{(k)}_{\text{п,нер}}, \mu, \beta\right),\\
\frac{dx}{dt}\left(t^{(k+1)}_{\text{л,рез}}, \mu, \beta\right) = \frac{dx}{dt}\left(t^{(k)}_{\text{п,нер}}, \mu, \beta\right),\\
\frac{dy}{dt}\left(t^{(k+1)}_{\text{л,рез}}, \mu, \beta\right) = \frac{dy}{dt}\left(t^{(k)}_{\text{п,нер}}, \mu, \beta\right).
\end{gathered} \tag{3.61}$$

Условия сшивки (61) составляют систему из $2(m+n)$ функциональных уравнений с неизвестными функциями $\varphi_1(\bar{x}, \beta)$, $\psi_1(\bar{x}, \beta)$ и их частными производными $\partial\varphi_1/\partial\bar{x}$, $\partial\psi_1/\partial\bar{x}$.

Так как $\varphi_1(\bar{x}, \beta)$, $\psi_1(\bar{x}, \beta)$ суть произвольные дифференцируемые по $\bar{x}$ функции (φ_1 есть m-мерная, ψ_1 — n-мерная вектор-функции), то для того, чтобы сделать систему (61) совместной, следует ввести $2(m+n)$ неизвестных параметров. Например, можно в качестве компонент φ_1, ψ_1 взять

$$\varphi_1^{(s)}(\bar{x}, \beta) = a_s\bar{x}_s + \beta b_s, \qquad \psi_1^{(r)}(\bar{x}, \beta) = c_r\bar{x}_r + \beta d_r,$$
$$s = 1, \ldots, m, \qquad r = 1, \ldots, n, \qquad n \leqslant m, \tag{3.62}$$

и тогда система (61) сводится к двум подсистемам линейных алгебраических уравнений (одна — порядка $2m$ с неизвестными a_s, b_s, $s=1, \ldots, m$, вторая — порядка $2n$ с неизвестными c_r, d_r, $r=1, \ldots, n$). Решение этих систем — известная алгебраическая операция.

Системы вида (61) приходится решать всякий раз при переходе с резонансного отрезка на перезонансный и наоборот.

Остается теперь задать число α, определяющее ширину резонансных зон, и моменты $t^{(k)}_{\text{л,рез}}$, $t^{(k)}_{\text{п,рез}}$ $(k=1, 2, \ldots)$. Последние существенно зависят от T, т. е. от промежутка времени, на котором строится асимптотическая теория.

Заметим также, что

$$\begin{aligned} &\|x(t,\mu,\beta)\| \leqslant \mu A t, \qquad \|\bar{x}(t,\mu,\beta)\| \leqslant \mu A t,\\ &\|y(t,\mu,\beta)\| \leqslant (1+\mu) A t, \quad \|\bar{y}(t,\mu,\beta)\| \leqslant (1+\mu) A t, \end{aligned} \tag{3.63}$$

где A — положительная постоянная, ограничивающая нормы $\|X\|$, $\|\omega\|$, $\|Y\|$ в области их определения G_{m+n+2}. Если $T=O(\mu^{-1})$ (например, $T=\mu^{-1}$), то целесообразно в качестве α брать величину $O(\mu)$, например

$$\alpha=\mu. \tag{3.64}$$

Эта рекомендация вытекает из оценок, выводимых при обосновании метода усреднения для многочастотных систем, решения которых «не застревают» в окрестности какой-то резонансной точки [52].

Таким образом, мы считаем, что ширина резонансной зоны (или резонансная окрестность) равна 2μ. Чтобы получить $t^{(1)}_{\text{п,рез}}$ ($t^{(1)}_{\text{л,рез}}=0$ в силу того, что $(k, \omega_0)=0$), необходимо решить относительно t уравнение

$$(k^*, \omega(\bar{x}(t, \mu, \beta)))=\mu, \tag{3.65}$$

где k^* — резонансный вектор с наименьшей нормой. Обозначим решения уравнения (65) через

$$0 < t_1^* < \ldots < t_{n_1}^* = T. \tag{3.66}$$

Тогда очевидно, что $t^{(1)}_{\text{п,рез}}=t_1^*$, $t^{(2)}_{\text{л,рез}}=t_2^*$, $t^{(2)}_{\text{п,рез}}=t_3^*$ и т. д. В окончательных формулах надо положить $\beta=\mu$.

Изложенный алгоритм построения асимптотической теории, основанной на усреднении по всем быстрым переменным, показывает, что преобразование Крылова — Боголюбова в форме (1.147) содержит быстро растущие относительно t функции, так как функции преобразования u_1, v_1, ... выражаются формулами вида (54), (55) на резонансных временных отрезках.

Отсюда можно заключить, что системы сравнения (1.118), построенные с помощью оператора усреднения M_v, примененного к уравнению (47), не являются наилучшими для асимптотической теории, если вращательная система многочастотна и ее решение проходит через резонансные зоны.

§ 3.7. Асимптотическая теория автономных резонансных вращательных систем, использующая усреднение при постоянных возмущениях

Пусть выполняется условие резонанса (46) для некоторых k с нормой $1 \leqslant \|k\| \leqslant N$. Проведем процедуру сглаживания (48) с помощью оператора усреднения при постоянных возмущениях. Тогда уравнения сравнения любого приближения запишутся в виде

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \mu \sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N}{}' X_k(\bar{p} + x_0, \beta) \exp\{i(k, \bar{q} + y_0)\} + \sum_{s \geqslant 2} \mu^s A_s(\bar{p}, \bar{q}, \beta),$$

$$\frac{dq}{dt} = \omega(\bar{p} + x_0) - \omega_0 + \mu \sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N}{}' Y_k(\bar{p} + x_0, \beta) \exp\{i(k, q + y_0)\} + \\ + \sum_{s \geqslant 2} \mu^s B_s(\bar{p}, \bar{q}, \beta). \quad (3.67)$$

Система сравнения (67) в отличие от (47) не содержит в явном виде t, а в суммах со штрихом индекс-вектор суммирования k принимает только резонансные значения. В резонансном случае в уравнениях (67) нет «разделения движений», как это имело место в § 1.11. Покажем, что, используя решение системы сравнения (67) в качестве первого приближения асимптотической теории возмущений системы (47), можно построить теорию любого приближения в тригонометрической форме, без вековых членов.

Будем искать преобразование Крылова — Боголюбова, преобразующее систему (47) в (67), в виде

$$p = \bar{p} + \sum_{s \geqslant 1} \mu^s u_s(\bar{p}, \bar{q}, t, \beta), \qquad q = \bar{q} + \sum_{s \geqslant 1} \mu^s v_s(\bar{p}, \bar{q}, t, \beta). \quad (3.68)$$

Тогда система, определяющая функции u_s, v_s $(s = 1, 2, \ldots)$, имеет вид

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{q}}, \omega(\bar{p} + x_0) - \omega_0\right) + \frac{\partial u_1}{\partial t} = \\ = \sum_{1 \leqslant \|k\| \leqslant N}{}'' X_k(\bar{p} + x_0, \beta) \exp\{i(k, \bar{q} + \omega_0 t + y_0)\}, \quad (3.69)$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{q}}, \omega(\bar{p} + x_0) - \omega_0\right) + \frac{\partial v_1}{\partial t} = \\ = \sum_{1 \leqslant \|k\| \leqslant N}{}'' Y_k(\bar{p} + x_0, \beta) \exp\{i(k, \bar{q} + \omega_0 t + y_0)\} + \left(\frac{\partial \omega(\bar{p} + x_0)}{\partial \bar{p}}, u_1\right), \quad (3.70)$$

. . . .

$$\left(\frac{\partial u_s}{\partial \bar{q}}, \omega(\bar{p}+x_0)-\omega_0\right) =$$
$$= U_s(\bar{p}, \bar{q}, t, \beta; u_1, v_1, \ldots, u_{s-1}, v_{s-1}; A_2, B_2, \ldots, A_s), \quad (3.71)$$
$$\left(\frac{\partial v_s}{\partial \bar{q}}, \omega(p+x_0)-\omega_0\right) =$$
$$= V_s(\bar{p}, \bar{q}, t, \beta; u_1, v_1, \ldots, v_{s-1}, u_s; A_2, B_2, \ldots, A_s, B_s), \quad (3.72)$$

. . . .

В суммах с двумя штрихами k принимает только нерезонансные значения.

Система (69) — (72) допускает последовательное решение, которое может быть выражено в аналитическом виде. Например, функции u_1, v_1 равны

$$u_1(\bar{p}, \bar{q}, t, \beta) =$$
$$= \sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{X_k(\bar{p}+x_0, \beta)\exp\{i(k, \bar{q}+\omega_0 t+y_0)\}}{i(k, \omega(\bar{p}+x_0))} + \varphi_1(\bar{p}, \beta),$$
$$v_1(\bar{p}, \bar{q}, t, \beta) = \sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{Y_k(\bar{p}+x_0, \beta)\exp\{i(k, \bar{q}+\omega_0 t+y_0)\}}{i(k, \omega(\bar{p}+x_0))} + \quad (3.73)$$
$$+\left(\frac{\partial\omega(\bar{p}+x_0)}{\partial\bar{p}}, \sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{X_k(\bar{p}+x_0, \beta)\exp\{i(k, \bar{q}+\omega_0 t+y_0)\}}{i^2(k, \omega(\bar{p}+x_0))^2}\right) + \psi_1(\bar{p}, \beta).$$

Выражения (73) показывают, что в случае усреднения по t возможно определить первые члены преобразования Крылова — Боголюбова в тригонометрической форме, если положить $\varphi_1(\bar{p}, \beta) \equiv \psi_1(\bar{p}, \beta) \equiv 0$. Если продвинуться дальше и на каждом шаге итераций выбирать функции $A_s(\bar{p}, \bar{q}, \beta)$, $B_s(\bar{p}, \bar{q}, \beta)$ как средние значения по t правых частей уравнений (71), (72), т. е. если их определять из равенств

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T U_s dt = 0, \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T V_s dt = 0, \quad (3.74)$$

а функции $\varphi_s(\bar{p}, \beta)$; $\psi_s(\bar{p}, \beta)$ при $s = 2, 3, \ldots$ приравнивать нулю, то возможно построить преобразование Крылова — Боголюбова в тригонометрической форме и для высших приближений. Чтобы получить асимптотические представления для решений первоначальной системы (47), необходимо подставить решение системы (67) и выражения вида (73) в формулы (68). Переход от переменных p, q к первоначальным переменным x, y тривиален.

§ 3.8. Неавтономные вращательные системы

Рассмотрим теперь неавтономные вращательные системы $m+n$-го порядка

$$dx/dt=\mu X(x,\ y,\ t,\ \mu),\quad dy/dt=\omega(x)+\mu Y(x,\ y,\ t,\ \mu),\tag{3.75}$$

где функции X, Y 2π-периодичны по y и аналитичны по x, y в соответствующей области. Если X и Y являются периодическими функциями и по t, то, вводя $n+1$-ю частоту $\omega_{n+1}=1$, мы приводим систему (75) к автономной вращательной системе $m+n+1$-го порядка, поэтому заслуживает отдельного рассмотрения случай непериодической зависимости от t.

Сначала применим к правым частям уравнений (75) оператор усреднения по времени

$$\begin{gathered}\overline{X}(x, y, \mu)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(x, y, t, \mu)\,dt,\\ \overline{Y}(x, y, \mu)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T Y(x, y, t, \mu)\,dt\end{gathered}\tag{3.76}$$

и напишем систему сравнения для (75) в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{dt}&=\mu\overline{X}(\bar{x}, \bar{y}, \beta)+\sum_{s\geqslant 2}\mu^s A_s(\bar{x}, \bar{y}, \beta),\\ \frac{d\bar{y}}{dt}&=\omega(\bar{x})+\mu\overline{Y}(\bar{x}, \bar{y}, \beta)+\sum_{s\geqslant 2}\mu^s B_s(\bar{x}, \bar{y}, \beta),\end{aligned}\tag{3.77}$$

где через β обозначен параметр μ в функциях X, Y, а функции A_s, B_s, как и раньше, пока неизвестны.

Для преобразования системы (75) в (77) воспользуемся неавтономным преобразованием Крылова — Боголюбова в виде

$$x=\bar{x}+\sum_{s\geqslant 1}\mu^s u_s(\bar{x}, \bar{y}, t, \beta),\qquad y=\bar{y}+\sum_{s\geqslant 1}\mu^s v_s(\bar{x}, \bar{y}, t, \beta).\tag{3.78}$$

Для функций преобразования u_s, v_s имеем бесконечную систему уравнений в частных производных

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial\bar{y}}, \omega(\bar{x})\right)+\frac{\partial u_1}{\partial t}=X(\bar{x}, \bar{y}, t, \beta)-\overline{X}(\bar{x}, \bar{y}, \beta),\tag{3.79}$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial\bar{y}}, \omega(\bar{x})\right)+\frac{\partial v_1}{\partial t}=Y(\bar{x}, \bar{y}, t, \beta)-\overline{Y}(\bar{x}, \bar{y}, \beta)+\left(\frac{\partial\omega(\bar{x})}{\partial\bar{x}}, u_1\right),\tag{3.80}$$

. . . .

$$\left(\frac{\partial u_s}{\partial\bar{y}}, \omega(\bar{x})\right)+\frac{\partial u_s}{\partial t}=U_s(x, \bar{y}, t, \beta; u_1, \ldots, v_{s-1}; A_2, B_2, \ldots, A_s),\tag{3.81}$$

$$\left(\frac{\partial v_s}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) + \frac{\partial v_s}{\partial t} = V_s(\bar{x}, \bar{y}, t, \beta; u_1, \ldots, u_s; A_2, B_2, \ldots, A_s, B_s), \tag{3.82}$$

. . . .

Последовательное интегрирование уравнений (79)—(82) представляет собой в общем случае существенно более сложную задачу по сравнению с автономными вращательными системами. Тем не менее существует достаточно общий алгоритм, позволяющий написать их решение в аналитической форме. В силу периодичности X, Y по y имеем разложения

$$X(x, y, t, \beta) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} X_k(x, t, \beta) \exp\{i(k, y)\}, \tag{3.83}$$

$$Y(x, y, t, \beta) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} Y_k(x, t, \beta) \exp\{i(k, y)\}, \tag{3.84}$$

из которых следует, что усреднение по t сводится к усреднению коэффициентов X_k, Y_k. Иными словами,

$$\overline{X}(x, y, \beta) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} \overline{X}_k(x, \beta) \exp\{i(k, y)\}, \tag{3.85}$$

$$\overline{Y}(x, y, \beta) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} \overline{Y}_k(x, \beta) \exp\{i(k, y)\}, \tag{3.86}$$

$$\overline{X}_k(x, \beta) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_k(x, t, \beta)\, dt, \tag{3.87}$$

$$\overline{Y}_k(x, \beta) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y_k(x, t, \beta)\, dt. \tag{3.88}$$

Введем теперь обозначения

$$F_k^{(0)}(\bar{x}, t, \beta) = \int_0^t [X_k(\bar{x}, \tau, \beta) - \overline{X}_k(\bar{x}, \beta)]\, d\tau, \tag{3.89}$$

$$\Phi_k^{(0)}(\bar{x}, t, \beta) = \int_0^t [Y_k(\bar{x}, \tau, \beta) - \overline{Y}_k(\bar{x}, \beta)]\, d\tau, \tag{3.90}$$

$$F_k^{(s)}(\bar{x}, t, \beta) = \int_0^t F_k^{(s-1)}(\bar{x}, \tau, \beta)\, d\tau, \tag{3.91}$$

$$\Phi_k^{(s)}(\bar{x}, t, \beta) = \int_0^t \Phi_k^{(s-1)}(\bar{x}, \tau, \beta)\, d\tau, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{3.92}$$

$$Fe_k^{(s)}(\bar{x}, t, \beta) = \int_0^t \exp\{i(k, \omega(\bar{x}))\tau\} F_k^{(s)}(\bar{x}, \tau, \beta)\, d\tau, \tag{3.93}$$

$$\Phi e_k^{(s)}(\bar{x}, t, \beta) = \int_0^t \exp\{i(k, \omega(\bar{x}))\tau\} \Phi_k^{(s)}(\bar{x}, \tau, \beta)\, d\tau, \quad s=0, 1, \ldots \quad (3.94)$$

Пользуясь разложениями (85), (86) и операторами (89)—(94), можно вывести последовательные выражения для решения системы (79)—(82). Например,

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}, t, \beta) = \sum_{\|k\|\geqslant 0} F_k^{(0)}(\bar{x}, t, \beta) \exp\{i(k, \bar{y})\} - \\ - \sum_{\|k\|\geqslant 1}'' i(k, \omega(\bar{x})) \exp\{i(k, \bar{y}) - i(k, \omega(\bar{x}))t\} Fe_k^{(0)}(\bar{x}, t, \beta) + \\ + \varphi_1(\bar{x}, \beta), \quad (3.95)$$

$$v_1(\bar{x}, \bar{y}, t, \beta) = \sum_{\|k\|\geqslant 0} \Phi_k^{(0)}(\bar{x}, t, \beta) \exp\{i(k, \bar{y})\} - \\ - \sum_{\|k\|\geqslant 1}'' i(k, \omega(\bar{x})) \exp\{i(k, \bar{y}) - i(k, \omega(\bar{x}))t\} \Phi e_k^{(0)}(\bar{x}, t, \beta) + \\ + \left(\frac{\partial\omega(\bar{x})}{\partial\bar{x}}, \sum_{\|k\|\geqslant 0} Fe_k^{(0)}(\bar{x}, t, \beta) \exp\{i(k, \bar{y}) - i(k, \omega(\bar{x}))t\}\right) - \\ - \left(\frac{\partial\omega(\bar{x})}{\partial\bar{x}}, \sum_{\|k\|\geqslant 1}'' i(k, \omega(\bar{x})) \exp\{i(k, \bar{y}) - i(k, \omega(\bar{x}))t\}\right) \times \\ \times \int_0^t Fe_k^{(0)}(\bar{x}, \tau, \beta)\, d\tau + \left(\frac{\partial\omega(\bar{x})}{\partial\bar{x}}, \varphi_1(\bar{x}, \beta)\right) + \psi_1(\bar{x}, \beta). \quad (3.96)$$

Формулы (95), (96) показывают, что в принципе возможно выписать также решения u_2, v_2 и т. д. уравнений (81), (82), которые будут выражаться через $F_k^{(s)}$, $\Phi_k^{(s)}$ $(s=2, 3, \ldots)$, $Fe_k^{(s)}$, $\Phi e_k^{(s)}$ $(s=1, 2, \ldots)$ и через произвольные дифференцируемые по $\bar{x}$ функции φ_s, ψ_s, а также будут содержать произвольные функции A_2, B_2 и т. д. Выбор последних следует осуществить с помощью условий (74), гарантирующих ликвидацию хотя бы части вековых членов вида $a(\bar{x}, \bar{y}, \beta)t$.

Из приведенных формул видно, что построение асимптотической теории возмущений неавтономных многочастотных систем (75) представляет собой громоздкую аналитическую задачу из-за того, что функции преобразования Крылова — Боголюбова u_s, v_s выражаются через интегралы (89)—(94), и, следовательно, эффективность построения асимптотической теории зависит от эффективности аналитических методов вычисления интегралов (89)—(94).

Следует подчеркнуть, что, как всегда в процессе интегрирования, $\bar{x}$ считается параметром, а не функцией времени. Если правые части системы (75) суть аналитические по t функции, то в этом случае операция интегрирования в (89)—(92) может быть выполнена. Асимптотическая теория возмущений для неавтономных вращательных систем может быть построена, по крайней мере в принципе, в аналитическом виде.

§ 3.9. Релаксационные колебания

В предыдущем изложении мы рассматривали обыкновенные дифференциальные уравнения, правые части которых являются регулярными функциями малого параметра μ. Другое направление асимптотической теории связано с исследованием таких обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых малый параметр μ является множителем при старших производных. Классическим примером такой системы является двумерная система

$$\mu \frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y), \tag{3.97}$$

где x, y — скалярные функции времени t. Если вместо (97) написать систему

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu} f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y), \tag{3.98}$$

то из нее видно, что правая часть первого уравнения уже не является регулярной в точке $\mu = 0$. Системы вида (97) получили в математической литературе [93, 99] название *сингулярно возмущенных уравнений.*

Различные аспекты теории уравнений вида (97) изучены А. Н. Тихоновым и его учениками А. Б. Васильевой, С. А. Ломовым, М. В. Федорюком, М. И. Иманалиевым, К. А. Касымовым, В. Ф. Бутузовым и др. [93—102]. Указанные авторы развили теорию пограничного слоя, разработали аналитический аппарат для изучения этого явления (ряды, членами которых являются «пограничные» функции), изучили условия разрешимости начальной и краевой задач.

Оригинальное направление в исследовании сингулярно возмущенных систем было предложено Л. С. Понтрягиным [103]. Сущность идей Л. С. Понтрягина состоит в том, что всякую траекторию системы (97) следует разбить на несколько участков и на каждом из этих участков строить свое асимптотическое представление с произвольной заданной степенью точности. Эти участки в свою очередь сшиваются в цельную траекторию без потери точности. Это весьма плодотворное научное направление в асимптотической теории дифференциальных уравнений получило развитие в работах Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розова и других учеников Л. С. Понтрягина и достаточно полно изложено в монографии [104]. Материал этого параграфа в основном заимствован из указанной монографии, и мы обратились к нему прежде всего по той причине, что усматривается нечто общее в методике построения решений резонансных систем с регулярными по μ правыми частями и решениями сингулярно возмущенных систем: в обоих случаях используется идея сшивания участков траекторий. Когда мы говорим о решениях систем вида (97), мы имеем в виду прежде всего так называемые релаксационные колебания: такие периодические решения, которые состоят как из участков медленного, так и из участков быстрого изменения фазовых координат в функции времени t, и из переходов от одних к другим — срывов и падений.

Рассмотрим соответствующую (97) вырожденную систему

$$f(x, y)=0, \quad dy/dt=g(x, y). \tag{3.99}$$

В отличие от регулярных систем здесь вырожденная система состоит из одного функционального и одного дифференциального уравнений, поэтому говорить о порождающем решении с произвольной начальной точкой (x_0, y_0) не представляется возможным: они всегда должны удовлетворять функциональному уравнению

$$f(x, y)=0. \tag{3.100}$$

Поэтому вопрос о построении решений сингулярно возмущенной системы (97), ε-близких к решениям вырожденной системы (99), имеет смысл лишь для таких решений возмущенной системы (97), начальные точки которых находятся в достаточно малой окрестности кривой $f(x, y)=0$. Выяснилось [104], что не все такие решения стремятся при $\mu\to 0$ к решениям порождающей системы (99).

Изложим в общих чертах геометрическую интерпретацию на фазовой плоскости Oxy релаксационных колебаний двумерных систем вида (97), предложенную Е. Ф. Мищенко и Н. Х. Розовым [104].

В каждой точке фазовой плоскости определим вектор фазовой скорости системы (97):

$$\mathbf{v}=(v_1, v_2), \quad v_1=f(x, y)/\mu, \quad v_2=g(x, y). \tag{3.101}$$

Пусть $Q_0=(x_1, y_1)$ — начальная точка движения (рис. 9). Если она находится на конечном расстоянии от кривой Γ (100), то в этой точке $\mathbf{v}(x_1, y_1, \mu)$ при конечном значении $g(x_1, y_1)$ имеет бесконечно большую первую компоненту $(1/\mu)f(x_1, y_1)$ при $\mu\to 0$. Следовательно, фазовая координата x изменится на конечную величину почти мгновенно при почти неизменном значении фазовой координаты y, т. е. движение точки по траектории будет близким к движению по горизонтальной прямой $y=y_1$ в силу дифференциального уравнения

$$\mu\frac{dx}{dt}=f(x, y_1). \tag{3.102}$$

Характер движения на первом участке не изменится до тех пор, пока фазовая точка системы (97) не приблизится к кривой Г (рис. 10) на расстояние порядка μ, т. е. пока компоненты вектора $v(x, y, \mu)$ не станут сравнимыми между собой. Если уравнение (102) не имеет устойчивых положений равновесия, то

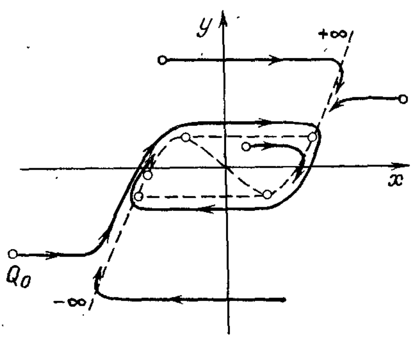

Рис. 9. Изображение траекторий системы (3.97), у которой $f(x, y) = y - x^3/3 + x$

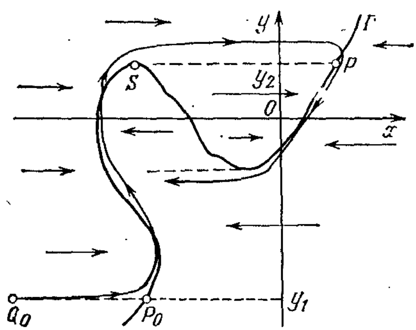

Рис. 10. Качественное поведение траектории системы (3.97) с начальной точкой Q_0 при малых значениях μ

движущаяся точка с большой скоростью уйдет в бесконечность почти по прямой $y = y_1$. Если же фазовая точка, двигаясь в соответствии с уравнением (102), приблизится к одному из устойчивых положений равновесия, то после этого движение по траектории сингулярно возмущенной системы (97) будет происходить плавно, вблизи устойчивого участка кривой Г, как бы сопровождая движущееся по кривой Г устойчивое положение равновесия уравнения

$$\mu \frac{dx}{dt} = f(x, y) \tag{3.103}$$

при меняющейся координате y. Сама координата y изменяется медленно в силу вырожденной системы (99).

Может оказаться, что на рассматриваемом участке кривой Г нет положений равновесия системы (99). Тогда величина y может достичь за конечное время некоторого бифуркационного значения $y = y_2$, и фазовая точка системы (97) быстро устремится почти по прямой $y = y_2$ в окрестность другого устойчивого положения равновесия уравнения

$$\mu \frac{dx}{dt} = f(x, y_2).$$

Если бифуркационного значения не окажется, то фазовая точка будет медленно удаляться в бесконечность, оставаясь вблизи кривой Г. Возможна такая ситуация, когда в результате последовательного чередования медленных и быстрых движений возникает замкнутая траектория, которая и представляет собой релаксационное колебание (рис. 11). В силу этой интерпретации естественно называть переменную x быстрой, а переменную y медленной (напомним, что в других параграфах книги переменная x представляла медленные движения, а переменная y — быстрые движения). В терминологии Е. Ф. Мищенко и Н. Х. Розова [104] уравнение (103), в котором y рассматривается как параметр, называется уравнением быстрых движений, соответствующим сингулярно возмущенной системе (97).

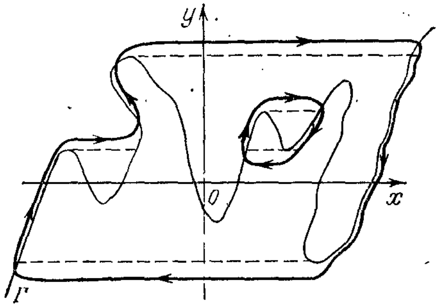

Рис. 11. Изображение релаксационных колебаний системы (3.97)

Такова в целом качественная картина поведения траекторий сингулярно возмущенных двумерных систем вида (97). Названными авторами [104] разработаны также аналитические представления для различных участков траекторий.

Всякую фазовую траекторию системы (97) можно разбить на участки следующих четырех типов:

а) участок медленного движения, лежащий в ε-полосе, сопровождающей участок медленного движения траектории Г, но не охватывающей конечные окрестности точки падения и точки срыва;

б) участок срыва, лежащий в конечной окрестности точки срыва траектории Г;

в) участок быстрого движения, лежащий в ε-полосе, сопровождающей участок быстрого движения траектории Г, но не охватывающей конечные окрестности точки срыва и точки падения;

г) участок падения, лежащий в конечной окрестности точки падения траектории Г.

К этим участкам следует еще добавить начальный участок быстрого движения, начинающийся в начальной точке, и следующий за ним начальный участок падения.

Асимптотические разложения для координат на различных участках траектории сингулярно возмущенной системы (97) (в конечных окрестностях точки срыва и точки падения вводятся свои локальные координаты) имеют различную аналитическую структуру. На одних участках это обычные степенные разложения по степеням малого параметра μ, на других участках разложения строятся по величинам $\mu^{n/3}\ln^{\nu}(1/\mu)$, где n и ν — целые неотрицательные числа. Коэффициенты этих асимптотических разложений, как показано в монографии [104], могут быть вычислены непосредственно с помощью функций $f(x, y)$, $g(x, y)$, без операции интегрирования. Важнейшей характеристикой релаксационного колебания является его период T_μ; найдено следующее асимптотическое представление:

$$T_\mu = K_{00} + \sum_{n=2}^{\infty} \mu^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} K_{n\nu} \ln^\nu \frac{1}{\mu}, \tag{3.104}$$

где целочисленная функция $\pi(n)$ определяется следующим образом:

$$\pi(n) = \begin{cases} s, & \text{если } n = 3s, \\ s+1, & \text{если } n = 3s+1, \\ s, & \text{если } n = 3s+2. \end{cases} \tag{3.105}$$

Читателя, заинтересованного в использовании конкретных формул аппарата, развитого для изучения релаксационных колебаний, отсылаем к монографии Е. Ф. Мищенко и Н. Х. Розова [104].

ГЛАВА IV

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, В КОТОРЫХ ВОЗМОЖНЫ ЧАСТОТНЫЕ РЕЗОНАНСЫ

В настоящей главе изложены алгоритмы, способствующие реализации метода усреднения и его различных вариаций в многочастотных колебательных системах, в частности в системах с распределенными параметрами [105]. Основные трудности, возникающие при исследовании многочастотных дифференциальных уравнений, как было показано в гл. III, состоят в получении оценок для количественного влияния частотных резонансов на амплитуды гармоник, входящих в структуру функций u_k, v_k преобразования Крылова — Боголюбова. Большой самостоятельной задачей является также реализация вычислительных алгоритмов, так как интегрирование усредненных уравнений в аналитической форме, как правило, не представляется возможным.

§ 4.1. Проблема малых знаменателей. Краткая история вопроса

Модельные задачи, описанные в гл. II, по существу, не содержат резонансных явлений, так как мы имеем дело в них с одной основной частотой ω. Настоящие трудности при решении задач, описывающих колебательные процессы, начинаются там, где имеется по меньшей мере две основные частоты. Многие трудности возникают, как мы видели в гл. III, из-за появления малых знаменателей при интегрировании уравнений в частных производных для замены переменных Крылова — Боголюбова.

Знаменитая проблема малых знаменателей возникла при исследовании дифференциальных уравнений, описывающих движение в планетных и спутниковых системах в ньютоновских гравитационных полях. Так как эта проблема представляет научный и практический интерес для достаточно широкого круга специалистов и имеет достаточно богатую и поучительную историю, остановимся на ней более подробно [21, 106]. Впервые малые знаменатели обнаружил Лаплас в 1784 г., изучая движение Юпитера и Сатурна вокруг Солнца. Оказалось, что малые знаменатели (дальше мы дадим подробное их описание) приводят к очень важным особенностям в движении этих планет, которые не могли быть объяснены выдающимися математиками прошлого (Лагранжем, Эйлером, Ламбертом и др.).

Дело в том, что движения планет и спутников (точнее, их координаты и скорости) имеют весьма сложный характер и математически могут быть представлены в виде кратных рядов Фурье, т. е. в виде комбинаций многих (чаще всего бесконечного множества) периодических движений с разными периодами, или, что то же самое, с разными частотами. Обычно при этом возможно выделить основные или главные частоты, которые по сравнению с другими суть большие величины. Например, в двухпланетной задаче (Солнце-планета — планета) можно выделить две основные частоты, соответствующие средним периодам обращения планет вокруг Солнца и представляющие собой средние угловые скорости их движения по гелиоцентрическим орбитам; астрономы называют эти основные частоты *средними движениями*. Строго говоря, средние движения планет или спутников не являются постоянными, но, как показывают наблюдения, изменяются очень медленно во времени.

Если в некоторой двухпланетной задаче основные частоты (средние движения) находятся в близкой соизмеримости (в терминологии гл. III «имеет место α-резонанс частот»), то тогда мы и встречаемся с проблемой малых знаменателей. Математически эффект малых знаменателей проявляется в том, что в решениях уравнений движения, представляемых рядами Фурье, появляются периодические члены с коэффициентами, знаменатели которых близки к нулю, или, иными словами, появляются гармоники с большими амплитудами. В движениях планет появляются эффекты, называемые в физике резонансными, наподобие резонансных колебаний двух маятников, точки подвеса которых находятся на общем гибком горизонтальном стержне.

В случае частотных резонансов элементы орбит планет и даже их средние движения претерпевают большие изменения, которые на сравнительно коротких интервалах времени трудно отличить от вековых, т. е. от линейных функций времени. Например, в случае Юпитера и Сатурна их средние движения изменяются так, что на протяжении 100 лет они почти не отличаются от вековых. Именно это обстоятельство побудило Лагранжа предпринять попытку (правда, неудачную) построить теорию движения Юпитера и Сатурна со средними движениями в виде линейных функций времени.

Как мы видели в гл. III, асимптотическая теория дифференциальных уравнений, использующая методы усреднения, указывает на то, что малые знаменатели препятствуют построению точных решений уравнений движения небесных тел в виде сходящихся бесконечных рядов для всех значений времени $t \in \in (-\infty, \infty)$. Если бы в арсенале науки имелись такие решения, то из них следовал бы вывод об устойчивости или неустойчивости

Солнечной системы — один из наиболее волнующих вопросов современного естествознания. Математические аспекты этой чрезвычайно трудной проблемы весьма подробно проанализированы Пуанкаре в знаменитом сочинении «Новые методы небесной механики» [12].

Вернемся теперь к замечательным исследованиям Лапласа. По наблюдениям второй половины XVIII в. среднее движение Сатурна $n_1^{(0)} = 120'',454645$, а Юпитера $n_2^{(0)} = 299'',128361$. Легко вычислить, что $n_2^{(0)} : n_1^{(0)} = 2,483328 \approx 5:2$, т. е. средние движения указанных планет рационально почти соизмеримы (они измеряются в угловых секундах в сутках).

Из этого отношения вытекает, что

$$2n_2^{(0)} - 5n_1^{(0)} = -4'',016503 = -1,95 \cdot 10^{-5} \text{ рад.} \tag{4.1}$$

Вспоминая определение α-резонанса, данное в § 3.1, можно заключить, что $\alpha = 1,95 \cdot 10^{-5}$.

Соответствующие дифференциальные уравнения для долготы Сатурна (величина l_1) и Юпитера (величина l_2) с учетом их взаимных притяжений имеют следующий общий вид [21]:

$$\begin{aligned} \frac{dl_1}{dt} &= \sum_{k_1,k_2=-N_1}^{N_1} A_{k_1k_2} \cos(k_1y_1 + k_2y_2), \\ \frac{dl_2}{dt} &= \sum_{k_1,k_2=-N_2}^{N_2} B_{k_1k_2} \cos(k_1y_1 + k_2y_2), \end{aligned} \tag{4.2}$$

где y_1, y_2 — некоторые функции, сложным образом (но, правда, почти линейно) зависящие от времени t и от самих долгот l_1, l_2.

Аналитическая структура коэффициентов $A_{k_1k_2}$, $B_{k_1k_2}$ также очень сложна [7, 21], но в приближенных теориях можно считать их постоянными величинами. Если написать строгую замкнутую систему дифференциальных уравнений планетной динамики, то она будет иметь вид многочастотной вращательной системы с медленными и быстрыми переменными (см. гл. III), и, следовательно, $A_{k_1k_2}$, $B_{k_1k_2}$ представляются степенными рядами относительно медленных переменных, в качестве которых здесь выступают отношения больших полуосей планетных орбит, их эксцентриситеты и взаимные наклоны орбит [7]. Кроме того, известно, что $A_{k_1k_2}$, $B_{k_1k_2}$ достаточно быстро убывают с возрастанием $|k_1|$, $|k_2|$, и важно также отметить, что коэффициенты $A_{k_1k_2}$ пропорциональны массе Юпитера, а $B_{k_1k_2}$ — массе Сатурна; поэтому $A_{k_1k_2}$ приблизительно в 3—5 раза больше $B_{k_1k_2}$. Отсюда следует ожидать, что эффект изменения l_1 со временем более значителен по сравнению с изменением l_2.

В известных теориях движения планет (как современных, так и прежних) показано, что на промежутке времени, исчисляемом десятилетиями,

$$y_1(t) \approx n_1^{(0)} t + y_{1,0}, \quad y_2(t) \approx n_2^{(0)} t + y_{2,0}, \tag{4.3}$$

где $n_1^{(0)}$, $n_2^{(0)}$ почти точно совпадают со значениями средних движений, получаемых непосредственно из наблюдений, выполненных на протяжении многих веков. Если допустить, что $A_{k_1k_2}$, $B_{k_1k_2}$ — постоянные числа, а $y_1(t)$, $y_2(t)$ выражаются формулами (3), то в результате интегрирования уравнений (2) получим

$$l_1(t) = A_{00} t + \sum_{k_1,k_2=-N_1}^{N_1} A_{k_1k_2} \frac{\sin\left[\left(k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}\right) t + \alpha_1\right]}{k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}}, \tag{4.4}$$

$$l_2(t) = B_{00} t + \sum_{k_1,k_2=-N_2}^{N_2} B_{k_1k_2} \frac{\sin\left[\left(k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}\right) t + \alpha_2\right]}{k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}}, \tag{4.5}$$

где α_1, α_2 — постоянные величины.

До Лапласа при построении теорий движения планет вокруг Солнца астрономы ограничивались членами с наименьшими индексами суммирования k_1, $k_2 = 1$, 2 (конечно, без строго математического обоснования такого усечения рядов), неявно предполагая, что все остальные слагаемые пренебрежимо малы (заметим, что в случае теорий движения других больших планет именно это имело место). Однако Лаплас обнаружил, что гармоника

$$\frac{A_{-5,2} \sin\left[\left(2n_2^{(0)} - 5n_1^{(0)}\right) t + \alpha_1\right]}{2n_2^{(0)} - 5n_1^{(0)}}$$

имеет вопреки прежним представлениям весьма большую амплитуду за счет малости знаменателя $2n_2^{(0)} - 5n_1^{(0)}$, который меньше, например, знаменателя $2n_2^{(0)} + 5n_1^{(0)}$ в 300 раз. Если бы $n_1^{(0)}$ и $n_2^{(0)}$ не были рационально почти соизмеримыми, тогда выписанная гармоника имела бы малую амплитуду и ее можно было бы не учитывать в теории, как это делали предшественники Лапласа. Лаплас обнаружил таким образом, что резонанс $n_1^{(0)} : n_2^{(0)} \approx 2:5$ приводит к появлению гармоники с большой амплитудой, и учет этой гармоники в теории движения Сатурна и Юпитера позволил привести теорию и наблюдения в относительное согласие.

Далее Лаплас получил, что средние суточные движения Сатурна и Юпитера содержат долгопериодические возмущения с периодом 883 года и с весьма значительными амплитудами 0″,055, 0″,0235 соответственно. Если их не учитывать, то расхождения в долготе между теорией и наблюдениями для Сатурна могут достигать 50′, а для Юпитера 20′ и более. Именно эти наблюдаемые предшественниками Лапласа отклонения и ставили ученых в тупик.

Исследования Лапласа по теории движения Сатурна и Юпитера следует признать выдающимся достижением математики и небесной механики, их мощных аналитических средств. Они поставили перед математиками и астрономами следующих поколений ряд фундаментальных проблем, решение которых обогатило современную математику.

После открытия Лапласом эффекта малых знаменателей (и особенно в XIX в.) наметились два четко выраженных, хотя и очень связанных между собой, направления.

Первое направление можно назвать астрономическим. Оно заключается в разработке методов и непосредственном построении приближенных решений тех задач небесной механики, в которых имеет место резонанс частот (в первую очередь соизмеримость средних движений) орбитальных движений небесных тел. От таких решений требовалось достаточно точное описание реальных движений, как правило, на ограниченном, но достаточно большом промежутке времени. В математической терминологии речь идет о построении асимптотических решений дифференциальных уравнений планетной динамики на асимптотически большом промежутке времени (порядка $O(\mu^{-1})$). Астрономы, можно сказать, успешно решили эту задачу теории возмущений для «не очень острых» резонансов с помощью классических разложений, понимаемых нами как такие аналитические выражения для искомых переменных, которые содержат вековые, тригонометрические и смешанные возмущения, т. е. возмущения вида At^s, $B\sin\alpha t$, $Ct^s\sin\alpha t$ $(s>0)$ соответственно.

Классическая теория возмущений для описания орбитальных движений больших планет вокруг Солнца была разработана в основном Эйлером, Клеро, Лагранжем, Лапласом, Гауссом, Леверье, Ньюкомбом [12, 107—110].

Исторически проблема малых знаменателей возникла при изучении движений в задаче Солнце — Юпитер — Сатурн, хотя астрономы относят ныне эту задачу к задачам с «не очень острым» резонансом. Представим себе на миг, что средние движения Сатурна и Юпитера равны $n_1^{(0)}=119{,}843122''$, $n_2^{(0)}=$ $=299{,}128361''$ соответственно. Тогда $2n_2^{(0)}-5n_1^{(0)}=-1{,}9\cdot10^{-7}$ рад, и выписанная выше гармоника имела бы амплитуду еще в 100 раз больше и «неправильности» в системе Юпитер — Сатурн были бы намного значительнее. В этом гипотетическом случае долгий период был бы равен 88 300 годам, а расхождения в долготах из-за неучета в теории члена $A_{-5,2}\sin\left[\left(2n_2^{(0)}-5n_1^{(0)}\right)t+\alpha_1\right]$ достигали бы немыслимых величин — около 83° и 23°. Тогда задача Солнце — Юпитер — Сатурн была бы типичной сильно возмущенной задачей (см. § 1.12).

Второе направление в проблеме малых знаменателей — математическое (или, если угодно, теоретическое), и состоит оно в качественном анализе решений дифференциальных уравнений движения небесных тел и в построении таких рядов, которые сходятся на неограниченном интервале времени. Из аналитических выражений для возмущений, построенных с помощью классической теории, с достаточной очевидностью следует, что классические разложения пригодны на некотором конечном промежутке времени, вне которого они не соответствуют реальным движениям планет. Поэтому следует считать естественными поиски математических методов, которые позволяли бы получать аналитические выражения (в первую очередь для медленных позиционных переменных x), не содержащие членов, пропорциональных t^s, $s>0$.

Лаплас был первым, кто обратил внимание на пороки классических разложений и поставил задачу об отыскании решений уравнений движения планет в виде тригонометрических рядов (если не учитывать неизбежный вековой член вида ωt в угловых переменных y в обозначениях гл. I и III). В XIX в. был выполнен ряд замечательных исследований (Ш. Делоне [22], С. Ньюкомб [110], А. Линдштедт [88], Г. Гильден [111]), согласно которым решения планетных задач можно представить в виде фóрмальных тригонометрических рядов.

Но наиболее глубокие математические результаты были получены на рубеже XIX и XX вв. Пуанкаре [12]. Историю этого интересного вопроса можно прочитать в [21].

В применении к системе дифференциальных уравнений канонического вида, которые можно рассматривать как частный случай многочастотных автономных вращательных систем (см. § 1.9), эти результаты сводятся к следующему.

Пусть дана каноническая система (подробности см. в гл. V)

$$\frac{dx_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_s},\qquad \frac{dy_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x_s},\qquad s=1,\ldots,m, \tag{4.6}$$

где $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $y=(y_1,\ldots,y_m)$ — переменные типа «действие — угол» (см. гл. V), т. е. x — вектор позиционных переменных, y — вектор угловых переменных. Гамильтониан H имеет вид

$$H(x,y)=H_0(x)+\mu H_1(x,y), \tag{4.7}$$

где $H_0(x)$ — так называемая невозмущенная часть гамильтониана, не зависящая от угловых переменных y, а $\mu H_1(x,y)$ — возмущающая его часть, представимая m-кратным рядом Фурье относительно y в некоторой области $G_{2m}=\{(x,y):\ x\in P_m,\ y\in Q_m\}$:

$$H_1(x,y)=\sum_{\|k\|\geqslant 0}h_k(x)\exp\{i(k,y)\},\qquad (k,y)=\sum_{s=1}^{m}k_sy_s. \tag{4.8}$$

Легко видеть, что если ввести обозначения

$$X(x, y) = -\partial H_1/\partial y, \tag{4.9}$$

$$\omega(x) = \partial H_0/\partial x, \tag{4.10}$$

$$Y(x, y) = \partial H_1/\partial x, \tag{4.11}$$

то гамильтонова система (6) записывается в виде (1.90).

Пуанкаре показал, что степенные ряды по степеням μ вида

$$x_s = x_s^{(0)} + \mu x_s^{(1)} + \mu^2 x_s^{(2)} + \ldots, \quad y_s = w_s + \mu y_s^{(1)} + \mu^2 y_s^{(2)} + \ldots, \tag{4.12}$$

$$w_s = n_s t + y_s^{(0)}, \quad s = 1, \ldots, m,$$

в которых коэффициенты $x_s^{(j)}$, $y_s^{(j)}$ выражаются тригонометрическими рядами вида

$$x_s^{(j)},\ y_s^{(j)} \sim \sum_{\|k\| \geqslant 0} \frac{A_{sk}^{(j)} \exp\{i(k, w)\}}{(k, n^{(0)})}, \tag{4.13}$$

представляют собой формальное решение гамильтоновой системы (6). В формулах (12), (13) $x_s^{(0)}$, $y_s^{(0)}$ — постоянные интегрирования, а постоянная n_s (частота угловой переменной y_s) зависит от μ и от $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$ следующим образом:

$$n_s\left(\mu, x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right) = n_s^{(0)}\left(x_1^{(0)}, \ldots x_m^{(0)}\right) + \mu n_s^{(1)}\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right) + \ldots \tag{4.14}$$

Если бы ряды (12), (13) сходились равномерно по t $(-\infty < t < \infty)$, то они представляли бы общее решение канонической системы (6), в котором позиционные переменные $x_1, \ldots, x_m$ остаются ограниченными при всех значениях t. Более точно, медленные переменные $x_1, \ldots, x_m$ являлись бы условно-периодическими функциями времени с m частотами.

Однако Пуанкаре [12] продемонстрировал, вообще говоря, расходимость рядов (12).

Положение в принципе остается таким же и в том случае, когда начальные значения частот $n_1^{(0)}, \ldots, n_m^{(0)}$ «не резонируют» при векторах k с относительно небольшой нормой $\|k\|$. Дело в том, что в бесконечных рядах (11), (13) всегда существуют векторы k с достаточно большой нормой $\|k\|$, для которых резонанс

$$(k, n^{(0)}) \approx 0 \tag{4.15}$$

при произвольном векторе начальных частот $n^{(0)} = \left(n_1^{(0)}, \ldots, n_m^{(0)}\right)$ всегда существует.

На основании этого Пуанкаре доказал, что ряды (12), (13) не могут сходиться равномерно по t $(-\infty < t < \infty)$ для начальных условий $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$ (от которых зависят начальные частоты $n_1^{(0)}, \ldots, n_m^{(0)}$), варьируемых в некотором интервале, даже при сколь угодно малых значениях μ.

Пуанкаре также поставил вопрос о том, могут ли ряды (12), (13) сходиться при малых μ и при некоторых фиксированных и выбранных надлежащим образом величинах $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$. Обоснованного отрицательного ответа Пуанкаре не получил, но он считал такую возможность весьма маловероятной, в чем, как показали исследования математиков, наших современников, он оказался неправ.

С точки зрения строгой сходимости рядов (12), (13) первые положительные результаты в проблеме малых знаменателей были получены в 1942 г. немецким математиком К. Л. Зигелем [91] и в 1953—1954 гг. академиком А. Н. Колмогоровым [112, 113].

Решающими для этого явились следующие новые идеи, основанные на «метрической концепции»:

1*. Использование того факта, что все малые знаменатели для «большинства» в смысле меры Лебега (см. [92]) иррациональных частот удовлетворяют некоторым оценкам снизу, вытекающим из арифметических свойств иррациональных чисел [114]. Если частоты $n_1^{(0)}, \ldots, n_m^{(0)}$ суть рациональные числа, то очевидно, что всегда найдется целочисленный вектор k, для которого выполняется условие точного резонанса (0-резонанса) $(k, n^{(0)}) = 0$, но множество рациональных чисел счетно и, следовательно, мера Лебега этого множества равна нулю.

2*. Анализ сходимости рядов с малыми знаменателями не для всех частот, а только для множества частот, удовлетворяющих оценкам, упомянутым в п. 1*. Тогда пригодность рядов оценивается в зависимости от меры множества частот, для которых ряды сходятся.

3*. Отказ от обычных рядов по степеням малого параметра при построении решений; применение нового итерационного метода типа метода Ньютона [115], основанного на последовательной замене переменных и обладающего ускоренной сходимостью, которая позволяет «погасить» влияние малых знаменателей.

Первые две идеи принадлежат Зигелю [91].

Разобьем множество всех вещественных чисел из интервала (0, 1) (числа 0 и 1 не включены) на два множества Λ_α и $\bar{\Lambda}_\alpha$ по следующему принципу. В множество Λ_α включим такие иррациональные числа α, для каждого из которых можно найти такое положительное число $\nu > 0$, что при любом целом положительном p выполняется неравенство

$$|\lambda^p - 1| > (2p)^{-\nu}, \quad \lambda = \exp\{2\pi i\alpha\}. \tag{4.16}$$

Неравенство (16) ограничивает снизу возможную скорость убывания абсолютных величин малых знаменателей $\lambda^p - 1$: при $p \to \infty$ число $|\lambda^p - 1|$ может, вообще говоря, стать сколь угодно малым, но оно все же больше числа $(2p)^{-\nu}$, которое тоже становится сколь угодно малым. Заметим, что для любого рационального числа из интервала (0, 1) неравенство (16) не имеет места, так как в этом случае всегда можно найти положительное число p такое, что $\lambda^p - 1 = 0$.

Уместно поставить следующий вопрос: какова лебегова мера множества Λ_α? Оказывается, что лебегова мера этого множества равна 1, т. е. «почти все» иррациональные числа $\alpha \in (0, 1)$ удовлетворяют оценке (16).

В множество $\bar{\Lambda}_\alpha$ входят все правильные рациональные дроби и те иррациональные числа, которые не удовлетворяют оценке (16). Лебегова мера множества $\bar{\Lambda}_\alpha$ равна нулю, но, к сожалению, оно всюду плотно в интервале (0, 1), и это является одним из основных препятствий на пути решения динамических задач, в которых могут появиться малые знаменатели. Неравенство (16) и аналогичные ему другие оценки играют ключевую роль в «борьбе» с отрицательным эффектом малых знаменателей.

Рассматривая консервативные динамические системы, А. Н. Колмогоров ввел «метрическую» точку зрения, которая позволяет изучать свойства не всех возможных движений, а основной массы движений, соответствующих не всем, а «почти всем» начальным условиям. Колмогоров предложил для исследования задач с малыми знаменателями новый в теории динамических систем итерационный метод, обладающий свойством ускоренной сходимости по сравнению с геометрической прогрессией. Идею такого метода в самой первичной фроме для задач небесной механики мы встречаем у С. Ньюкомба в работе 1874 г. [116].

После замечательных исследований Зигеля и Колмогорова появилось большое количество первоклассных математических работ [117—121]. В. И. Арнольдом доказано, что большинство в смысле лебеговой меры траекторий гамильтоновых систем вида (6) в вырожденном случае (это наиболее сложный случай, когда частоты задачи зависят не от всех медленных переменных) являются условно-периодическими функциями времени, если малый параметр μ весьма мал. Конечно, здесь идет речь о точных, а не об асимптотических приближенных решениях гамильтоновых систем. Колмогоров, Арнольд и другие исследователи [112, 117, 118] рассматривали аналитические гамильтоновы системы ($H(x, y, \mu)$ — аналитичная по x, y и 2π-периодическая по y функция). В связи с этим особого упоминания заслуживают работы Ю. Мозера [120, 121], который распространил идеи Колмогорова на случай систем уравнений с конечное число раз дифференцируемыми правыми частями. Кроме того, Мозер рассмотрел неканонические системы (т. е. системы вида (1.90)) и связал проблему нахождения их условно-периодических решений с теорией алгебр Ли [122] и конечных подгрупп бесконечномерных групп преобразований, получив при этом ряд глубоких заключений весьма общего характера.

Достаточно подробное изложение истории проблемы малых знаменателей дает возможность читателю почувствовать ту глубокую органическую связь между теорией точных решений дифференциальных уравнений и асимптотическими методами, дающими их приближенные решения. Математику-прикладнику всегда следует стремиться к распознаванию финальных (т. е. при $t \to \pm\infty$) свойств решений, так как подобная информация существенно облегчает построение и асимптотических приближенных решений.

§ 4.2. Проблема трех тел

В предыдущем параграфе изложена краткая история проблемы малых знаменателей, из которой следует, что они возникла при изучении движения Юпитера и Сатурна вокруг Солнца. Если предположить, что гипотетическая солнечная система состоит только из трех небесных тел (Солнца, Юпитера и Сатурна), то математической моделью такой планетной системы являются уравнения проблемы трех тел, а точнее двухпланетного варианта этой проблемы. В проблеме трех тел речь идет об изучении движения каждого из трех тел P_0, P_1, P_2 с произвольными массами m_0, m_1, m_2, взаимно притягивающих друг друга в соответствии с ньютоновым законом всемирного тяготения. Если же одна из масс, например m_0, намного больше других ($m_0 \gg m_1$, $m_0 \gg m_2$), то говорят, что имеем дело с двухпланетным вариантом задачи трех тел. Для удобства принято называть тело с массой m_0 Солнцем, а тела с массами m_1, m_2 — планетами. В системе Солнце — Юпитер — Сатурн $m_1 \approx 10^{-3}\, m_0$, $m_2 \approx 3 \cdot 10^{-4}\, m_0$.

Если ввести прямоугольную декартову систему координат с началом в центре Солнца (так называемую прямоугольную гелиоцентрическую систему), то дифференциальные уравнения движения планет вокруг Солнца имеют вид [7, 106]:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_1)\,x_1}{r_1^3} = fm_2\left[\frac{x_2 - x_1}{\Delta_{12}^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right],$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_1)\,y_1}{r_1^3} = fm_2\left[\frac{y_2 - y_1}{\Delta_{12}^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\right],$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_1)\,z_1}{r_1^3} = fm_2\left[\frac{z_2 - z_1}{\Delta_{12}^3} - \frac{z_1}{r_1^3}\right],$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_2}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_2)\,x_2}{r_2^3}&=fm_1\left[\frac{x_1-x_2}{\Delta_{12}^3}-\frac{x_2}{r_2^3}\right],\\
\frac{d^2y_2}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_2)\,y_2}{r_2^3}&=fm_1\left[\frac{y_1-y_2}{\Delta_{12}^3}-\frac{y_2}{r_2^3}\right],\\
\frac{d^2z_2}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_2)\,z_2}{r_2^3}&=fm_1\left[\frac{z_1-z_2}{\Delta_{12}^3}-\frac{z_2}{r_2^3}\right],
\end{aligned}\tag{4.17}$$

где x_s, y_s, z_s — прямоугольные гелиоцентрические координаты планеты P_s, $s=1,\ 2$, f — постоянная тяготения,

$$\Delta_{12}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\qquad r_s^2=x_s^2+y_s^2+z_s^2,$$
$$s=1,2.\tag{4.18}$$

Порядок системы (17) равен 12, и, хотя она имеет достаточно компактный вид (без бесконечных разложений), ее интегрирование в квадратурах не представляется возможным.

Уравнения (17) обладают одним существенным недостатком. В них не усматриваются в явной форме основные частоты задачи, поэтому к ним непосредственно не применима асимптотическая теория, изложенная в гл. III. Сначала необходимо выполнить замену переменных для преобразоваия уравнений (17), например, в систему вида (1.90), а потом уже воспользоваться теоремами и алгоритмами асимптотической теории возмущений. Астрономы такие замены разработали давно, и ниже будет приведена наиболее распространенная.

Для простоты будем рассматривать «эллиптический» случай, т. е. такой вариант двухпланетной задачи, при котором невозмущенное движение каждой планеты происходит по эллиптической орбите в соответствии с законами Кеплера [7].

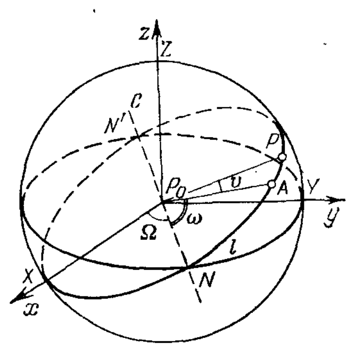

Рис. 12. Элементы орбиты планеты P: xP_0y — основная координатная плоскость (плоскость эклиптики); P_0 — центральное тело — Солнце; i — наклон орбиты планеты P к плоскости эклиптики; точка N — восходящий узел орбиты; $\angle NP_0A=\omega$ — аргумент перицентра орбиты; $\angle xP_0N=\Omega$ — долгота восходящего узла; $\angle PP_0A=v$ — истинная аномалия планеты P; A — перицентр орбиты

Введем вместо координат x_s, y_s, z_s и скоростей $\dot{x}_s$, $\dot{y}_s$, $\dot{z}_s$ каждой планеты P_s шесть кеплеровых элементов орбиты: большую полуось орбиты a_s, эксцентриситет орбиты e_s, наклон орбиты i_s, долготу восходящего узла Ω_s, угловое расстояние перигелия от узла ω_s, среднюю аномалию в эпоху (в определенный момент времени) $M_{s,0}$. Геометрический смысл этих элементов поясняется на рис. 12. Формулы, реализующие такую замену переменных, имеют вид [7]:

$$x_s = r_s\alpha_s, \quad y_s = r_s\beta_s, \quad z_s = r_s\gamma_s, \tag{4.19}$$

$$\begin{gathered}
\frac{dx_s}{dt} = \sqrt{\frac{f(m_0+m_s)}{p_s}}\left[\alpha_s e_s \sin v_s + \frac{d\alpha_s}{du_s}(1+e_s\cos v_s)\right],\\
\frac{dy_s}{dt} = \sqrt{\frac{f(m_0+m_s)}{p_s}}\left[\beta_s e_s \sin v_s + \frac{d\beta_s}{du_s}(1+e_s\cos v_s)\right],\\
\frac{dz_s}{dt} = \sqrt{\frac{f(m_0+m_s)}{p_s}}\left[\gamma_s e_s \sin v_s + \frac{d\gamma_s}{du_s}(1+e_s\cos v_s)\right],
\end{gathered} \tag{4.20}$$

$$r_s = \frac{p_s}{1+e_s\cos v_s}, \tag{4.21}$$

$$\begin{gathered}
\alpha_s = \cos u_s \cos\Omega_s - \sin u_s \sin\Omega_s \cos i_s,\\
\beta_s = \cos u_s \sin\Omega_s + \sin u_s \cos\Omega_s \cos i_s,\\
\gamma_s = \sin u_s \sin i_s, \qquad u_s = v_s + \omega_s,
\end{gathered} \tag{4.22}$$

$$t - \tau_s = \sqrt{\frac{p_s}{f(m_0+m_s)}}\int\limits_0^{v_s}\frac{d\lambda}{(1+e_s\cos\lambda)^2}, \tag{4.23}$$

$$p_s = a_s(1-e_s^2). \tag{4.24}$$

В этих формулах p_s — фокальный параметр эллипса, τ_s — момент прохождения планеты через перигелий своей орбиты.

В кеплеровых элементах система (17) преобразуется в систему [7, 106]:

$$\begin{gathered}
\frac{da_s}{dt} = \frac{2}{n_s a_s}\frac{\partial R_s}{\partial l_s},\\
\frac{de_s}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 e_s}\frac{\partial R_s}{\partial \pi_s} - \frac{e_s\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2\left(1+\sqrt{1-e_s^2}\right)}\frac{\partial R_s}{\partial l_s},\\
\frac{di_s}{dt} = -\frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}\sin i_s}\frac{\partial R_s}{\partial \Omega_s} - \operatorname{tg}\frac{i_s}{2}\frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}}\left(\frac{\partial R_s}{\partial \pi_s} + \frac{\partial R_s}{\partial l_s}\right),\\
\frac{d\Omega_s}{dt} = \frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}\sin i_s}\frac{\partial R_s}{\partial i_s},
\end{gathered} \tag{4.25}$$

$$\frac{d\pi_s}{dt} = \operatorname{tg}\frac{i_s}{2}\frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}}\frac{\partial R_s}{\partial i_s} + \frac{\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 e_s}\frac{\partial R_s}{\partial e_s},$$

$$\frac{dl_s}{dt} = n_s - \frac{2}{n_s a_s}\frac{\partial R_s}{\partial a_s} + \operatorname{tg}\frac{i_s}{2}\frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}}\frac{\partial R_s}{\partial i_s} + \\ + \frac{e_s\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2\left(1+\sqrt{1-e_s^2}\right)}\frac{\partial R_s}{\partial e_s}, \qquad s = 1, 2.$$

В уравнениях (25) используются следующие обозначения: π_s — долгота перигелия планеты P_s, n_s — ее среднее движение, l_s — ее средняя долгота в орбите. Для этих переменных имеем соотношения

$$\pi_s = \omega_s + \Omega_s, \tag{4.26}$$

$$n_s = \sqrt{f(m_0 + m_s)/a_s^3}, \tag{4.27}$$

$$l_s = \pi_s + M_s, \tag{4.28}$$

где M_s — средняя аномалия планеты P_s, вычисляемая по формуле

$$M_s = n_s(t - t_0) + M_{s,0}. \tag{4.29}$$

Как видно из (27), величины n_s не обращаются в нуль при $m_s = 0$, поэтому они и являются основными частотами в двухпланетной задаче. Для этих частот мы сохранили традиционную астрономическую символику и не воспользовались обозначением ω (как мы это делали в гл. I и III), так как в астрономии со времен Лапласа буква ω используется для обозначения углового расстояния перигелия от узла (см. рис. 12).

На планету P_1 действует притяжение со стороны планеты P_2, поэтому возмущающая функция R_1 пропорциональна массе m_2, а возмущающая функция R_2 пропорциональна массе m_1. Если считать массы малыми (порядка μ), т. е. $m_s = L_s\mu$, где L_s — коэффициент пропорциональности, то система (25) является, по существу, двухчастотной системой типа (1.90). Она описывается десятью медленными переменными (a_s, e_s, i_s, Ω_s, π_s, $s = 1, 2$) и двумя быстрыми переменными (l_1, l_2). Чтобы система (25) имела вид многочастотной системы (1.90), необходимо сначала представить частные производные возмущающих функций R_s в виде рядов Фурье по угловым переменным, после чего следует выполнить достаточно простые алгебраические операции в правых частях системы (25).

Получение конкретных разложений Фурье для возмущающих функций R_s (а следовательно, и для их частных производных) является одной из наиболее громоздких задач аналитической небесной механики. К счастью, классики небесной механики (и в первую очередь Леверье [107]) получили первые члены таких разложений в явном виде, и для планетных задач мы имеем выписанную в явной форме [7, 8] многочастотную систему дифференциальных уравнений вида (1.90).

В разложении Леверье возмущающей функции [107] получены все члены ряда Фурье с коэффициентами до 7-й степени включительно относительно малых величин: эксцентриситетов орбит двух планет e_1, e_2, отношения больших полуосей a_1/a_2 и $\sin^2(I/2)$, где I — угол между плоскостями их орбит (угол взаимного наклона орбит).

Во всяком случае читателю легко убедиться в том, что обозначения

$$a_s = x_s, \quad e_s = x_{s+2}, \quad i_s = x_{s+4}, \quad \Omega_s = x_{s+6}, \quad \pi_s = x_{s+8}, \quad l_s = y_s,$$

$$\mu X_s = \frac{2}{n_s a_s}\frac{\partial R_s}{\partial l_s},$$

$$\mu X_{s+2} = -\frac{\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 e_s}\frac{\partial R_s}{\partial \pi_s} - \frac{e_s\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2\left(1+\sqrt{1-e_s^2}\right)}\frac{\partial R_s}{\partial l_s}, \tag{4.30}$$

$$\mu X_{s+4} = -\frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}\sin i_s}\frac{\partial R_s}{\partial \Omega_s} - \operatorname{tg}\frac{i_s}{2}\frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}}\left(\frac{\partial R_s}{\partial \pi_s} + \frac{\partial R_s}{\partial l_s}\right),$$

$$\mu X_{s+6} = \frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}\sin i_s}\frac{\partial R_s}{\partial i_s},$$

$$\mu X_{s+8} = \operatorname{tg}\frac{i_s}{2}\frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}}\frac{\partial R_s}{\partial i_s} + \frac{\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 e_s}\frac{\partial R_s}{\partial e_s},$$

$$\mu Y_s = -\frac{2}{n_s a_s}\frac{\partial R_s}{\partial a_s} + \operatorname{tg}\frac{i_s}{2}\frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}}\frac{\partial R_s}{\partial i_s} + \frac{e_s\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2\left(1+\sqrt{1-e_s^2}\right)}\frac{\partial R_s}{\partial e_s}, \quad s = 1, 2,$$

$$\omega_s = n_s, \quad x = (x_1, \ldots, x_{10}), \quad y = (y_1, y_2), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2),$$
$$X = (X_1, \ldots, X_{10}), \quad Y = (Y_1, Y_2)$$

приводят систему (25) сразу к виду (1.90)

$$dx/dt = \mu X(x, y), \quad dy/dt = \omega(x) + \mu Y(x, y), \tag{4.31}$$

где $X(x, y)$, $Y(x, y)$ 2π-периодичны относительно долгот y_1, y_2.

В системе (31) некоторые угловые переменные (i_s, Ω_s, π_s) включены в вектор медленных переменных x, хотя классические разложения небесной механики указывают на то, что X, Y являются 2π-периодичными по Ω_s. π_s. Поэтому наиболее привычное разложение возмущающей функции R_s для задач небесной механики записывается в форме [7]

$$R_s = f\mu \sum_{\|k\|\geqslant 0} C_k^{(s)}(x) \exp\{i(k, y)\}. \tag{4.32}$$

Здесь уже введен шестимерный вектор медленных переменных x (вместо десятимерного), имеющий компоненты a_1, a_2, e_1, e_2, i_1, i_2, а шестимерный угловой вектор y, вместо двумерного, имеет в качестве компонент две быстрые переменные (l_1, l_2) и четыре медленные угловые переменные (Ω_1, Ω_2, π_1, π_2).

Коэффициенты $C_k^{(s)}(x)$ являются бесконечными степенными рядами относительно эксцентриситетов e_1, e_2, отношения больших полуосей и величины $\sin^2(I/2)$. Эти аналитические выражения чрезвычайно громоздки, поэтому приводить их в данной монографии нецелесообразно. Заинтересованный читатель может их найти, например, в книгах [7, 107].

При $\mu = 0$ получаем порождающую систему

$$\begin{aligned} &da_s^{(0)}/dt = 0, \quad de_s^{(0)}/dt = 0, \quad di_s^{(0)}/dt = 0, \\ &d\Omega_s^{(0)}/dt = 0, \quad d\pi_s^{(0)}/dt = 0, \quad dl_s^{(0)}/dt = n_s^{(0)}, \quad s = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Если теперь вернуться к нестрогим рассуждениям, изложенным в предыдущем параграфе, то нетрудно уловить связь между уравнениями (25), (31) и (2). Уравнения (2) представляют собой приближенную модель для системы (25), в которой десять кеплеровых элементов (a_s, e_s, i_s, Ω_s, π_s, $s = 1$, 2) считаются постоянными.

Система (33) определяет невозмущенные эллиптические орбиты планет P_1, P_2 соответственно. Ее общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} &a_s^{(0)} = \text{const}, \quad e_s^{(0)} = \text{const}, \quad i_s^{(0)} = \text{const}, \\ &\Omega_s^{(0)} = \text{const}, \quad \pi_s^{(0)} = \text{const}, \quad l_s^{(0)}(t) = n_s^{(0)}(t - t_0) + l_{s,0}^{(0)}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Метод усреднения в сочетании с преобразованием Крылова — Боголюбова, применяемый к уравнениям (25), позволяет в принципе построить асимптотическую теорию возмущений в двухпланетной задаче до любого конечного порядка. Методика и алгоритмы, изложенные в гл. III, здесь естественно находят непосредственное применение. Астрономы разработали несколько схем усреднения [123, 124], которые можно рассматривать как частные случаи операторов усреднения из §§ 1.3, 1.4.

Например, Гауссом предложена схема усреднения

$$\overline{R}_j(a_s, e_s, i_s, \Omega_s, \pi_s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_j dl_1 dl_2, \qquad j = 1, 2, \tag{4.35}$$

которая может трактоваться как оператор усреднения по быстрым переменным M_y, определенный в § 1.3. В этом случае усредненная возмущающая функция не зависит от быстрых переменных l_1, l_2.

Используя оператор усреднения (35), можно выписать усредненные уравнения первого приближения в смысле Боголюбова (см. § 1.7) для двухпланетной задачи трех тел. Они имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{d\bar a_s}{dt} = 0, \qquad \frac{d\bar e_s}{dt} = -\frac{\sqrt{1-\bar e_s^2}}{\bar n_s \bar a_s^2 \bar e_s} \frac{\partial \overline{R}_s}{\partial \bar\pi_s}, \\
\frac{d\bar i_s}{dt} = -\frac{1}{\bar n_s \bar a_s^2 \sqrt{1-\bar e_s^2}\sin \bar i_s} \frac{\partial \overline{R}_s}{\partial \bar\Omega_s} - \operatorname{tg}\frac{\bar i_s}{2} \frac{1}{\bar n_s \bar a_s^2 \sqrt{1-\bar e_s^2}} \frac{\partial \overline{R}_s}{\partial \bar\pi_s}, \\
\frac{d\bar\Omega_s}{dt} = \frac{1}{\bar n_s \bar a_s^2 \sqrt{1-\bar e_s^2}\sin \bar i_s} \frac{\partial \overline{R}_s}{\partial \bar i_s}, \\
\frac{d\bar\pi_s}{dt} = \operatorname{tg}\frac{\bar i_s}{2} \frac{1}{\bar n_s \bar a_s^2 \sqrt{1-\bar e_s^2}} \frac{\partial \overline{R}_s}{\partial \bar i_s} + \frac{\sqrt{1-\bar e_s^2}}{\bar n_s \bar a_s^2 \bar e_s} \frac{\partial \overline{R}_s}{\partial \bar e_s}, \\
\frac{d\bar l_s}{dt} = \bar n_s - \frac{2}{\bar n_s \bar a_s} \frac{\partial \overline{R}_s}{\partial \bar a_s} + \operatorname{tg}\frac{\bar i_s}{2} \frac{1}{\bar n_s \bar a_s^2 \sqrt{1-\bar e_s^2}} \frac{\partial \overline{R}_s}{\partial \bar i_s} + \\
+ \frac{\bar e_s \sqrt{1-\bar e_s^2}}{\bar n_s \bar a_s^2 \left(1+\sqrt{1-\bar e_s^2}\right)} \frac{\partial \overline{R}_s}{\partial \bar e_s}, \qquad s = 1, 2.
\end{gathered} \tag{4.36}$$

Не представляет особого труда и написание усредненных уравнений любого конечного приближения путем добавления к правым частям уравнений (36) выражений вида $\sum \mu^s A_s(\bar x)$, $\sum \mu^s B_s(\bar x)$.

Таким образом, к уравнениям (25) (или, что то же самое, к уравнениям (31)) в полном объеме применимы методика и алгоритмы, изложенные в § 3.5 и позволяющие вычислить в аналитической форме возмущения любого s-го порядка, т. е. члены вида $\mu^s u_s$, $\mu^s v_s$, составляющие преобразование Крылова —

Боголюбова. Например, для больших полуосей планетных орбит (которые являются медленными переменными) будем иметь

$$a_j(t, \mu) = \bar{a}_j(t, \mu) + \mu u_1(\bar{a}_j, \ldots, \bar{l}_j) + \ldots$$
$$\ldots + \mu^s u_s(\bar{a}_j, \ldots, \bar{l}_j), \quad j = 1, 2, \qquad (4.37)$$

где вектор-функции $u_1, \ldots, u_s$ определяются в аналитическом виде с помощью формул (3.54), (3.55) в зависимости от того, имеются или отсутствуют резонансные соотношения между начальными значениями средних движений планет $n_1^{(0)}$ и $n_2^{(0)}$. Формулы, аналогичные (37), естественно получаются и для других элементов орбит — медленных переменных e_j, i_j, Ω_j, π_j.

Быстрые переменные — долготы l_j планет — выражаются с помощью формул

$$l_j(t, \mu) = \bar{l}_j(t, \mu) + \mu v_1(\bar{a}_j, \ldots, \bar{l}_j) + \ldots$$
$$\ldots + \mu^s v_s(\bar{a}_j, \ldots, \bar{l}_j), \quad j = 1, 2, \qquad (4.38)$$

в которых аналитические выражения для вектор-функций $v_1, \ldots, v_s$ представляются формулами (3.56), (3.57). Формулы вида (37), (38), с одной стороны, выражают преобразование Крылова — Боголюбова, а с другой — дают асимптотическую теорию возмущений первоначальных уравнений двухпланетной задачи (25) с точностью до $O(\mu^s)$, если в них вместо $\bar{a}_j(t, \mu)$, $\bar{e}_j(t, \mu), \ldots, \bar{l}_j(t, \mu)$ поставлены решения усредненных уравнений s-го приближения. В связи с этим на первое место выдвигается вопрос об интегрируемости усредненных уравнений первого приближения (36) или вообще s-го приближения.

Гауссом доказано, что частный случай планетного варианта усредненной задачи трех тел, а именно ее «плоский вариант», состоящий в том, что плоскости орбит планет совпадают и, следовательно,

$$i_1 \equiv i_2 \equiv \Omega_1 \equiv \Omega_2 \equiv 0, \qquad (4.39)$$

сводится к интегрируемому случаю [7, 8]. К сожалению, усредненные уравнения первого приближения (36) для «пространственного случая» ($i_1 \neq 0$, $i_2 \neq 0$) не интегрируемы в квадратурах, хотя очевидным образом можно выписать два первых интеграла:

$$\bar{a}_j = \text{const}, \quad j = 1, 2. \qquad (4.40)$$

§ 4.3. Общая схема усреднения для задач небесной механики

Операторы усреднения, определенные в §§ 1.3, 1.4, могут быть объединены в некоторую достаточно общую схему, пригодную прежде всего для задач небесной механики. Для этого введем $m+n$-мерный вектор-столбец $R(x, y, \mu)$, компоненты которого суть правые части многочастотной системы (1.90):

$$R(x, y, \mu) = \begin{bmatrix} \mu X_1(x, y) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mu X_m(x, y) \\ \omega_1(x) + \mu Y_1(x, y) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \omega_n(x) + \mu Y_n(x, y) \end{bmatrix}. \tag{4.41}$$

Рассмотрим прямоугольную числовую матрицу

$$A_{sn} = (a_{ij}), \quad i = 1, \ldots, s; \quad j = 1, \ldots, n, \ s < n, \tag{4.42}$$

и образуем s-мерный вектор D с помощью равенства

$$D = A_{sn} y. \tag{4.43}$$

Пусть $\operatorname{rang} A_{sn} = s$, и ради определенности допустим, что определитель

$$\Delta_{ss} = \det(a_{ij}) \neq 0, \quad i, j = 1, \ldots, s. \tag{4.44}$$

Разрешая систему (43) относительно $y_1, \ldots, y_s$, будем иметь

$$y_i = f_i(D, y_{s+1}, \ldots, y_n), \qquad i = 1, \ldots, s, \tag{4.45}$$

где f_i — линейные функции своих аргументов.

Далее заменим быстрые переменные $y_1, \ldots, y_s$ в вектор-функции $R(x, y, \mu)$ с помощью равенств (45). Будем иметь

$$R(x, y, \mu) = \tilde{R}(x, D, y_{s+1}, \ldots, y_n, \mu). \tag{4.46}$$

Функция $\tilde{R}$ также является периодической относительно угловых переменных $D, y_{s+1}, \ldots, y_n$, однако период по каждому из этих аргументов может отличаться от 2π. Эти величины определяются элементами числовой матрицы (42). Обозначим периоды функции $\tilde{R}$ по переменным $y_{s+1}, \ldots, y_n$ через $T_{s+1}, \ldots, T_n$ соответственно и вычислим среднее значение $\tilde{R}$ по переменным $y_{s+1}, \ldots, y_n$ на соответствующих периодах, считая в процессе интегрирования x и D неизменными:

$$\overline{\overline{R}}(x, D, \mu) = \frac{1}{T_{s+1} \ldots T_n} \int_0^{T_{s+1}} \ldots \int_0^{T_n} \tilde{R}(x, D, y_{s+1}, \ldots, y_n, \mu)\, dy_{s+1} \ldots dy_n \tag{4.47}$$

Эта формула содержит в себе как частные случаи операторы усреднения $M_y, M_{y^{(s)}}, M_t$, определенные в § 1.3. Действительно:

1. Оператор M_y получается из (47), если положить $s = 0$, т. е. если считать матрицу A_{sn} нулевой матрицей. Тогда

$$\overline{\overline{R}}(x, \mu) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} R(x, y, \mu)\, dy_1 \ldots dy_n. \tag{4.48}$$

2. Оператор $M_{y(s)}$ получается из (47), если

$$A_{sn}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underbrace{0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 1}_{s} & & & & \ldots & 0 \end{bmatrix}; \tag{4.49}$$

поэтому

$$y_1=D_1,\ \ldots,\ y_s=D_s, \tag{4.50}$$

$$\bar{R}(x, y_1, \ldots, y_s, \mu)=\frac{1}{(2\pi)^{n-s}}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}R(x, y_1, \ldots, y_n, \mu)\,dy_{s+1}\ldots dy_n. \tag{4.51}$$

3. Допустим теперь, что взята матрица

$$A_{sn}=\begin{bmatrix} k_1^* & k_2^* & \cdots & k_n^* \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.52}$$

где $k_1^*, \ldots, k_n^*$ — некоторые целые числа. Тогда очевидно, что вектор D будет одномерным, а величина его единственной компоненты равна

$$D_1=(k^*, y). \tag{4.53}$$

Если, например, $k_1^*\neq 0$, то

$$y_1=\frac{D_1-k_2^*y_2-\cdots-k_n^*y_n}{k_1^*}. \tag{4.54}$$

Подстановка выражения y_1 в (41) и интегрирование по переменным $y_2, \ldots, y_n$ на соответствующих периодах дает

$$\bar{\bar{R}}(x, D_1, \mu)=\frac{1}{T_2\cdots T_n}\int_0^{T_2}\ldots\int_0^{T_n}\tilde{R}(x, D_1, y_2, \ldots, y_n)\,dy_2\ldots dy_n. \tag{4.55}$$

Это равенство непосредственно не выражает оператор M_t усреднения по времени t, однако если числа $k_1^*, \ldots, k_n^*$ являются не любыми, а лишь такими, для которых выполняется условие резонанса $(k^*, \omega)=0$, тогда после интегрирования по формуле (55) остаются лишь резонансные члены, т. е. сумма вида

$$\bar{\bar{R}}(x, D_1, \mu)=\sum_{\|k\|\geqslant 0}{}' \tilde{R}_k(x, \mu)\exp\{ikD_1\}, \tag{4.56}$$

где штрих, как и прежде, означает, что индекс суммирования k

принимает лишь «резонансные» значения; $\bar{R}_k(x, \mu)$ — коэффициенты Фурье функции $\bar{R}(x, D_1, y_2, \ldots, y_n)$.

В заключение отметим, что общий оператор усреднения (47) содержит в себе и более общий случай схемы усреднения, а именно тот, когда $s > 1$, т. е. существует несколько неколлинеарных резонансных векторов k^*, для которых $(k^*, \omega_0) = 0$. Тогда размерность вектора D больше единицы. Вектор D в небесной механике получил название «вектор аномалий Делоне» [8, 125].

§ 4.4. Ограниченная задача трех тел

Вернемся к системе (17) и положим в ней массу m_1 равной нулю:

$$m_1 = 0, \tag{4.57}$$

а координаты планеты P_1 обозначим через x, y, z. Тогда система (17) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{fm_0x}{r^3} = fm_2\left(\frac{x_2 - x}{\Delta^3} - \frac{x}{r^3}\right),\\
&\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{fm_0y}{r^3} = fm_2\left(\frac{y_2 - y}{\Delta^3} - \frac{y}{r^3}\right),\\
&\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{fm_0z}{r^3} = fm_2\left(\frac{z_2 - z}{\Delta^3} - \frac{z}{r^3}\right),\\
&\frac{d^2x_2}{dt^2} + f(m_0 + m_2)\frac{x_2}{r_2^3} = 0,\\
&\frac{d^2y_2}{dt^2} + f(m_0 + m_2)\frac{y_2}{r_2^3} = 0,\\
&\frac{d^2z_2}{dt^2} + f(m_0 + m_2)\frac{z_2}{r_2^3} = 0, \quad \Delta \equiv \Delta_{12}, \quad r = r_1.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Такая модель задачи трех тел, в которой имеется одна большая масса (m_0), одна малая (m_2) и одна нулевая масса (m_1), называется ограниченной задачей трех тел. Она служит весьма подходящей моделью для описания движений в задаче Солнце — Юпитер — астероид. Система (58) является полурасщепленной, так как последние ее три уравнения не содержат функций x, y, z. Эти уравнения описывают движения в задаче двух тел и легко интегрируются в конечной форме [7, 106]. В таком случае можно считать, что в первых трех уравнениях системы (58) координаты x_2, y_2, z_2 являются известными функциями времени. По этой причине подсистема, состоящая из первых трех уравнений (58), может рассматриваться отдельно.

Итак, уравнения ограниченной задачи трех тел могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{fm_0x}{r^3}&=f\mu\left[\frac{x_2(t)-x}{\Delta^3}-\frac{x}{r^3}\right],\\
\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{fm_0y}{r^3}&=f\mu\left[\frac{y_2(t)-y}{\Delta^3}-\frac{y}{r^3}\right],\\
\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{fm_0z}{r^3}&=f\mu\left[\frac{z_2(t)-z}{\Delta^3}-\frac{z}{r^3}\right],
\end{aligned}\tag{4.59}$$

где

$$\Delta^2(x,\ y,\ z,\ t)=[x_2(t)-x]^2+[y_2(t)-y]^2+[z_2(t)-z]^2,\tag{4.60}$$

величина

$$\mu=m_2\tag{4.61}$$

играет роль малого параметра в этой задаче. К сожалению, неизвестны какие-либо первые интегралы системы (59), которые могли бы способствовать ее интегрированию. Исключение составляет тот случай, когда возмущающая планета P_2 с массой μ движется по круговой орбите. Такая модель называется ограниченной круговой задачей трех тел, и ее уравнения имеют один известный первый интеграл, так называемый интеграл Якоби [7, 126].

В случае ограниченной задачи трех тел ($m_1=0$) уравнения (25) (если опустить индекс $s=1$) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\frac{da}{dt}=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial l},\qquad \frac{de}{dt}=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \pi}-\frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)}\frac{\partial R}{\partial l},\\
&\frac{di}{dt}=-\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega}-\operatorname{tg}\frac{i}{2}\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi}+\frac{\partial R}{\partial l}\right),\\
&\frac{d\Omega}{dt}=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},\\
&\frac{d\pi}{dt}=\operatorname{tg}\frac{i}{2}\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},\\
&\frac{dl}{dt}=n-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\operatorname{tg}\frac{i}{2}\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)}\frac{\partial R}{\partial e},
\end{aligned}\tag{4.62}$$

$$a_2^{(0)}=\text{const},\quad e_2^{(0)}=\text{const},\quad i_2^{(0)}=\text{const},\quad \Omega_2^{(0)}=\text{const},\quad \pi_2^{(0)}=\text{const},$$

$$l_2^{(0)}(t)=n_2^{(0)}(t-t_0)+\pi_2^{(0)}+M_{20}^{(0)},$$

где $M_{20}^{(0)}$ — средняя аномалия возмущающей планеты P_2 в начальный момент $t=t_0$.

Как и в двухпланетном варианте задачи трех тел, система уравнений (62) также является двухчастотной, но в отличие от системы (25) здесь одна частота, $n_2^{(0)}$, — постоянная величина.

Усредненные уравнения первого приближения для системы (62) можно построить с помощью различных операторов усреднения, специально введенных для задач небесной механики [8, 124] и являющихся частными случаями операторов, описанных в §§ 1.3, 1.4, 4.3. К таким операторам относятся:

1. Схема усреднения Гаусса. Она усредняет правые части дифференциальных уравнений по всем быстрым переменным и выражается формулой (35).

2. Схема усреднения П. Фату. Она выражается равенством

$$\overline{R}(a, e, i, \Omega, \pi, l) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(a, e, i, \Omega, \pi, l, l_2)\, dl_2. \tag{4.63}$$

3. Схема усреднения Н. Д. Моисеева. Она выражается формулой

$$\overline{R}(a, e, i, \Omega, \pi, l_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(a, e, i, \Omega, \pi, l, l_2)\, dl. \tag{4.64}$$

4. Первая схема Делоне — Хилла. Введем вместо быстрой переменной l_2 аномалию Делоне (см. § 4.3) по формуле

$$D = k_1^* l + k_2^* l_2, \tag{4.65}$$

где целые числа k_1^*, k_2^* таковы, что $k_1^* n^{(0)} + k_2^* n_2^{(0)}$ является малой величиной (случай α-резонанса частот $n^{(0)}$, $n_2^{(0)}$). Наличие α-резонанса частот обусловливает то, что аномалия Делоне D становится медленной угловой переменной. После замены будем иметь (см. § 4.3)

$$R(a, a_2, e, e_2, \ldots, l, l_2) = \tilde{R}(a, a_2, e, e_2, \ldots, D, l), \tag{4.66}$$

поэтому

$$\overline{\tilde{R}}(a, e, i, \Omega, \pi, D) = \frac{1}{T}\int_0^{T} \tilde{R}(a, e, i, \Omega, \pi, D, l)\, dl, \tag{4.67}$$

где T является наименьшим общим кратным для чисел $2\pi\|k^*\|/(k_1 k_2^* - k_2 k_1^*)$ при k_1, $k_2 = 1, 2, \ldots$ Схема усреднения (67) выгодна тем, что она сохраняет в $\overline{\tilde{R}}$ все резонансные члены, т. е. все гармоники с малым знаменателем $k_1^* n^{(0)} + k_2^* n_2^{(0)}$.

5. Вторая схема Делоне — Хилла. Введем так называемую обобщенную аномалию Делоне по формуле

$$\tilde{D} = n_2^{(0)} M/n + \Omega - M_2 \tag{4.68}$$

и с помощью этого соотношения из разложения возмущающей функции (32) исключим разность $\Omega - M_2$. После этого выполняется процедура усреднения по средней аномалии M с помощью оператора

$$\overline{\widetilde{R}}(a, e, i, \Omega, \pi, \widetilde{D}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \widetilde{R}(a, e, i, \Omega, \pi, \widetilde{D}, M)\, dM. \quad (4.69)$$

Схемы Фату и Моисеева являются типичными схемами усреднения по части быстрых переменных (оператор $M_{y^{(s)}}$ из § 1.3), а схемы Делоне — Хилла суть схемы усреднения вдоль порождающего решения или при постоянных возмущениях (см. § 1.4) с учетом резонансов частот. Более подробные сведения о схемах усреднения в небесной механике можно найти в [8, 124].

Применяя теперь к системе (62) любую из приведенных схем сглаживания и идею Крылова — Боголюбова, можно получить усредненные уравнения любого конечного приближения вида (1.118) или (3.67), а из них (путем отбрасывания из правых частей сумм $\sum \mu^s A_s$, $\sum \mu^s B_s$) — усредненные уравнения первого приближения; например, для системы (62) получаем с помощью первой схемы Делоне — Хилла:

$$\begin{gathered}
\frac{d\bar{a}}{dt} = 2\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm_0}}\, k_1^* \frac{\partial \overline{\overline{R}}}{\partial D}, \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = 2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm_0}} \frac{\partial \overline{\overline{R}}}{\partial D}, \\
\frac{d\bar{i}}{dt} = \frac{\operatorname{ctg} \bar{i}}{\sqrt{fm_0 \bar{p}}} \frac{\partial \overline{\overline{R}}}{\partial \bar{\pi}} - \frac{k_2^*}{\sqrt{fm_0 \bar{p}}\, \sin \bar{i}} \frac{\partial \overline{\overline{R}}}{\partial D}, \\
\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = \frac{1}{\bar{n}\bar{a}^2 \sqrt{1 - \bar{e}^2}\, \sin \bar{i}} \frac{\partial \overline{\overline{R}}}{\partial \bar{i}}, \\
\frac{d\bar{\pi}}{dt} = \operatorname{tg} \frac{\bar{i}}{2} \frac{1}{\bar{n}\bar{a}^2 \sqrt{1 - \bar{e}^2}} \frac{\partial \overline{\overline{R}}}{\partial \bar{i}} + \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}{\bar{n}\bar{a}^2 \bar{e}} \frac{\partial \overline{\overline{R}}}{\partial \bar{e}}, \\
\frac{\partial D}{dt} = \left(k_1^* \bar{n} - k_2^* n_2^{(0)}\right) - 2k_1^* \sqrt{\frac{\bar{a}}{fm_0}} \frac{\partial \overline{\overline{R}}}{\partial \bar{a}} + \frac{k_2^*}{\sqrt{fm_0 \bar{p}}\, \sin \bar{i}} \frac{\partial \overline{\overline{R}}}{\partial \bar{i}}.
\end{gathered} \quad (4.70)$$

Система (70) обладает тем замечательным свойством, что в ней сохранены резонансные гармоники, а это значит, что функции $u_1, v_1, \ldots, u_s, v_s$ преобразования Крылова — Боголюбова не будут содержать малых знаменателей. Таким образом, строится асимптотическая теория малых, а не больших возмущений. Тем самым задача с большими возмущениями (сильно возмущенная задача) благодаря качественному использованию метода сглаживания как бы становится задачей с малыми возмущениями (слабо возмущенной задачей). Действие малых знаменателей локализовано в усредненных кеплеровых элементах $\bar{a}$,

$\bar{e}$, ..., D, а в преобразовании Крылова — Боголюбова вида (3.60) оно будет отсутствовать. Чтобы преобразование Крылова — Боголюбова давало асимптотические представления для решения первоначальной системы (62), необходимо, как неоднократно указывалось раньше, решить усредненную систему (70). Можно доказать [8, 124], что усредненные по Делоне — Хиллу уравнения плоской ограниченной круговой задачи трех тел интегрируемы в квадратурах, т. е. известна полная система ее первых интегралов (система уравнений имеет четвертый порядок). То же самое можно утверждать и относительно усредненных по Фату и Моисееву уравнений плоской ограниченной круговой задачи трех тел. Что касается пространственного случая ограниченной круговой задачи трех тел, то известно, что только схема Гаусса (см. (35)) приводит к интегрируемой задаче. Первые интегралы усредненных уравнений можно найти в [7, 8, 124].

Остановимся более подробно на уравнениях (70) и предположим, что $\bar{i} \equiv \Omega \equiv 0$ (плоский вариант задачи). Тогда система (70) будет иметь порядок 4, ее четыре первых интеграла известны [7, 8, 124]:

$$\sqrt{\bar{a}} - \frac{k_1^*}{k_2^*}\sqrt{\bar{a}(1-\bar{e}^2)} = C_1, \tag{4.71}$$

$$\frac{fm_0}{2\bar{a}} + \frac{k_2^* n_2^{(0)}}{k_1^*}\sqrt{fm_0\bar{a}} + \bar{\bar{R}}(\bar{a}, \bar{e}, \bar{\omega}, D) = C_2, \tag{4.72}$$

$$\bar{\omega} + 2\int \sqrt{\frac{\bar{p}}{fm_0}}\,\frac{\partial \bar{\bar{R}}}{\partial \bar{p}}\,dt = C_3, \tag{4.73}$$

$$t - \int\left[k_1^*\sqrt{\frac{fm_0}{\bar{a}^3}} - k_2^* n_2^{(0)} - 2k_1^*\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm_0}}\,\frac{\partial \bar{\bar{R}}}{\partial \bar{a}} - 2k_2^*\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm_0}}\,\frac{\partial \bar{\bar{R}}}{\partial \bar{p}}\right]^{-1} dD = C_4. \tag{4.74}$$

Соотношения (71)—(74) дают нам общее решение уравнений (70) для плоского случая. Но чтобы получить в явном виде основные выражения для теории возмущений по Крылову — Боголюбову, т. е. зависимость функций u_1, v_1, u_2, v_2, ... от времени t, необходимо выполнить операцию обращения этих интегралов, в результате которой должны получить явную зависимость искомых функций $\bar{a}$, $\bar{e}$ (или $\bar{p}$), $\bar{\omega}$, D от времени. Под операцией обращения первых интегралов подразумевается операция получения явной зависимости искомых функций (в данном случае переменных $\bar{a}$, $\bar{e}$, $\bar{\omega}$, $\bar{p}$) от времени или от какой-либо вспомогательной промежуточной переменной (например, аномалии Делоне D). В астрономической практике находят явные зависимости $\bar{a}(D)$, $\bar{e}(D)$, $\bar{\omega}(D)$ из равенств (71), (72), (73), а равенство (74) играет роль уравнения Кеплера для задачи двух тел [7, 126]. Другими словами, в выкладках аномалия Делоне D играет роль промежуточной независимой переменной, и лишь в окончательных формулах можно воспользоваться соотношением (74) для перехода от аномалии D к времени как независимой переменной. Можно вообще написать уравнения возмущенного движения планеты, используя D в качестве аргумента.

§ 4.5. Алгоритмы, реализующие обращение первых интегралов дифференциальных уравнений ограниченной круговой задачи трех тел

Процедура обращения первых интегралов (71)—(73) не является тривиальной, так как возмущающая функция $\tilde{R}$ и ее частные производные представляют собой ряды Пуассона (степенные ряды по степеням $\bar{e}$ и отношения $\bar{a}/a_1$ и тригонометрические ряды по кратным $\bar{\omega}$ и D). Разработаны различные методики численного, полуаналитического и аналитического характера для обращения первых интегралов в задачах небесной механики [127—132], реализованные на электронно-вычислительных машинах, хотя, к сожалению, ни одна из них не является универсальной и достаточно эффективной. Получение явных аналитических зависимостей $\bar{a}$, $\bar{e}$, $\bar{\omega}$ от аномалии D с помощью ЭВМ существенно зависит от мощности ЭВМ и возможностей математического обеспечения; необходимо иметь в стандартном математическом обеспечении ЭВМ пакеты программ для выполнения математических операций над аналитическими выражениями. Такими пакетами являются, например, системы аналитических преобразований (САП) Reduce [133], УПП [134], но, к сожалению, нельзя утверждать, что на ЭВМ сегодняшнего дня эти пакеты программ являются достаточно эффективными и производительными. Эффективность применения методов усреднения для асимптотического интегрирования многочастотных систем дифференциальных уравнений зависит в конечном счете от возможностей систем аналитических преобразований на ЭВМ, так как выполнение того объема аналитических операций, который необходим при нахождении высших приближений, практически невозможно без ЭВМ. К сожалению, применение ЭВМ для выполнения аналитических (буквенных) операций (сложение, вычитание, умножение и деление рядов с буквенными коэффициентами, подстановка ряда в ряд и др.), по крайней мере на сегодняшний день, не является столь эффективным, как хотелось бы, поэтому часто представляется целесообразным иметь дело с рядами, коэффициентами которых являются числа. В этом случае использование ЭВМ сводится к выполнению арифметических операций над коэффициентами-числами аналитических выражений. Такой метод может быть назван численно-аналитическим или полуаналитическим. Как мы убедились выше, построение асимптотической теории возмущений для таких систем не представляет принципиальных трудностей, лишь бы было найдено в явной форме решение усредненных уравнений первого приближения [7, 8, 17].

Изложим теперь некоторые алгоритмы обращения первых интегралов (71)—(74).

Усредненное значение по Делоне — Хиллу (67) возмущающей функции $\bar{\bar{R}}$ для каждого типа соизмеримости средних движений $\left(k_1^*: k_2^* = n_1 : n_2\right)$ имеет свой аналитический вид, поэтому получение явной зависимости оскулирующих*) элементов (фазовых переменных $\bar{a}$, $\bar{e}$, $\bar{\omega}$) от аномалии Делоне D строится с учетом этого фактора.

В. А. Приходько [127] решил эту задачу для соизмеримости $k_1^* : k_2^* = 2:5$, характерной для группы астероидов Минервы. В случае плоского варианта ($i = \Omega = 0$) ограниченной круговой задачи трех тел усредненная возмущающая функция после выполнения процедуры интегрирования по формуле (67) принимает вид

$$\bar{\bar{R}}^{(0)}(\bar{a}, \bar{p}, D) = f\mu \sum_{s=0}^{\infty} C_{sk_1^*, sk_2^*}(\bar{a}, \bar{p}) \cos sD, \tag{4.75}$$

где коэффициенты $C_{sk_1^*, sk_2^*}$ выражаются через так называемые коэффициенты Лапласа [7] с помощью соотношений:

$$C_{0,0}(\bar{a}) = \sum_{i=0,\, i\neq 1}^{\infty} C_{0,0}^{(i/2)} \bar{a}^{i/2}, \tag{4.76}$$

$$C_{1,5}(\bar{a}) = \sum_{i=2}^{\infty} C_{2,5}^{(i/2)} \bar{a}^{i/2}, \tag{4.77}$$

$$C_{2,10}(\bar{a}) = \sum_{i=4}^{\infty} C_{4,10}^{(i/2)} \bar{a}^{i/2}, \tag{4.78}$$

в которых $C^{(i/2)}$ суть числа, а нижние индексы коэффициентов рядов как раз и указывают на наличие соизмеримости 2 : 5. Подставляя разложения (76)—(78) в первый интеграл (72), получим равенство вида

$$F(\bar{a}, D) = C_2, \tag{4.79}$$

*) Траектория возмущенного движения в каждый момент времени соприкасается с траекторией невозмущенного движения для этого же момента и представляет собой огибающую семейства невозмущенных траекторий. Траектории семейства невозмущенных движений называются *оскулирующими орбитами*, а их элементы — *оскулирующими элементами*.

где

$$F(\bar{a}, D) = \frac{fm_0}{2\bar{a}} + \frac{k_2^*}{k_1^*} n_2^{(0)} \sqrt{fm_0\bar{a}} + f\mu \Big\{ C_{0,0}(\bar{a}) +$$
$$+ C_{2,5}(\bar{a}) \cos D + C_{4,10}(\bar{a}) \cos 2D + \ldots + C_{sk_1^*, sk_2^*}(\bar{a}) \cos sD + \ldots \Big\}. \tag{4.80}$$

Равенство (79) можно рассматривать как неявную функцию переменных $\bar{a}$ и D, и наша первая задача состоит в отыскании явной зависимости $\bar{a} = \bar{a}(D)$. Отметим, что, несмотря на принципиальную возможность обращения интегралов (71)—(74), фактическое их обращение связано с выполнением большого объема аналитических операций, и для этого целесообразно использовать ЭВМ.

Перейдем теперь к отысканию явной функциональной зависимости

$$\bar{a} = \bar{a}(D). \tag{4.81}$$

Функция $F(\bar{a}, D)$ является четной относительно D и представляет собой тригонометрический ряд по аргументам, кратным аномалии Делоне D, а коэффициенты этого ряда суть ряды по степеням величины $\sqrt{\bar{a}}$ [132].

Дифференцируя равенство (80), напишем частную производную $\partial F/\partial \bar{a}$ в виде

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{a}} = \frac{1}{2k_1^*} \sqrt{\frac{fm_0}{\bar{a}}} \left(-k_1^* \bar{n} + k_2^* \bar{n}_2^{(0)}\right) + \frac{\partial \bar{\bar{R}}^{(0)}}{\partial \bar{a}}. \tag{4.82}$$

В резонансном случае $-k_1^* \bar{n} + k_2^* n_2^{(0)} = O(\mu)$ и $\partial \bar{\bar{R}}^{(0)}/\partial \bar{a} = O(\mu) \neq 0$; следовательно, и $\partial F/\partial \bar{a} = O(\mu) \neq 0$. Отсюда следует, что к уравнению (80) применима теорема о существовании обратной для неявной функции [56], и, решая его, можно получить $\bar{a} = \bar{a}(D)$.

Представим функцию F в виде ряда

$$F(\bar{a}, D) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s(\bar{a}) \cos sD, \tag{4.83}$$

где $F_s(\bar{a})$ выражается через коэффициенты Лапласа и в конечном итоге через различные целые степени $\sqrt{\bar{a}}$. Тогда равенство (79) примет вид

$$\sum_{s=0}^{\infty} F_s(\bar{a}) \cos sD = C_2. \tag{4.84}$$

Из этого равенства можно различными способами определять $\bar{a} = \bar{a}(D, C_2)$. Мы применим здесь способ, удобный с точки зрения машинной реализации.

Представим усредненную возмущающую функцию $\overline{\overline{R}}^{(0)}(\bar{a}, D)$ как

$$\overline{\overline{R}}^{(0)}(\bar{a}, D) = R_0^{(0)}(\bar{a}) + R_1^{(0)}(\bar{a}, D). \tag{4.85}$$

Подставим (85) в равенство (72); тогда оно примет вид

$$\frac{fm_0}{2} + \frac{k_2^*}{k_1^*} n_2^{(0)} \sqrt{fm_0\bar{a}^3} + \bar{a}R_0^{(0)}(\bar{a}) - C_2\bar{a} + \bar{a}R_1^{(0)}(\bar{a}, D) = 0. \tag{4.86}$$

Другими словами, равенство (72) мы представим в виде части, зависящей только от $\bar{a}$, и части, зависящей от $\bar{a}$ и D:

$$\Phi_1(\bar{a}) + \Phi_2(\bar{a}, D) = 0. \tag{4.87}$$

Положим

$$\bar{a} = a_0 + \Delta a, \tag{4.88}$$

считая, что Δa мало по сравнению с a_0.

Разложим левую часть равенства (86) в ряд Тейлора в окрестности точки a_0 по степеням Δa до четвертого порядка. Как оказалось, для всех астероидов группы Минервы замена ряда Тейлора такой суммой обеспечивает достаточную точность вычисления оскулирующих элементов орбит.

Соберем отдельно члены ряда, зависящие только от a_0, и члены, зависящие от a_0 и D. Из того, что значения возмущающей функции $R_1^{(0)}(a_0, D)$ и производных $\partial^k R_1^{(0)}(a_0, D)/\partial a_0^k$, $\partial^k R_0^{(0)}(a_0)/\partial a_0^k$ малы, следует, что вклад в значение выражения (86), даваемый членами, зависящими от a_0 и D, значительно меньше вклада от членов, не зависящих от D. Отсюда следует, что a_0 мы можем определить из условия

$$\frac{fm_0}{2} + \frac{k_2^*}{k_1^*} n_2^{(0)} \sqrt{fm_0}\, a_0^{3/2} + a_0R_0^{(0)}(a_0) - C_2a_0 = 0, \tag{4.89}$$

а приращение Δa — из уравнения

$$a_0R_1^{(0)}(a_0, D) + \Delta a\left[\frac{3k_2^*}{2k_1^*} n_2^{(0)}\sqrt{fm_0}\, a_0^{3/2} + a_0\frac{\partial R_0^{(0)}(a_0)}{\partial a_0} + \right.$$
$$\left. + R_0^{(0)}(a_0) + a_0\frac{\partial R_1^{(0)}(a_0, D)}{\partial a_0} + R_1^{(0)}(a_0, D) - C_2\right] +$$
$$+ \frac{(\Delta a)^2}{2!}\left[\frac{3k_2^*}{4k_1^*} n_2^{(0)}\sqrt{\frac{fm_0}{a_0}} + a_0\frac{\partial^2 R_0^{(0)}(a_0)}{\partial a_0^2} + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial R_0^{(0)}(a_0)}{\partial a_0} + a_0\frac{\partial^2 R_1^{(0)}(a_0, D)}{\partial a_0^2} + 2\frac{\partial R_1^{(0)}(a_0, D)}{\partial a_0}\right] +$$

$$+\frac{(\Delta a)^3}{6}\left[-\frac{3k_2^*}{8k_1^*}n_2^{(0)}\sqrt{\frac{fm_0}{a_0^3}}+a_0\frac{\partial^3 R_0^{(0)}(a_0)}{\partial a_0^3}+3\frac{\partial^2 R_0^{(0)}(a_0)}{\partial a_0^2}+\right.$$
$$\left.+a_0\frac{\partial^3 R_1^{(0)}(a_0, D)}{\partial a_0^3}+3\frac{\partial^2 R_1^{(0)}(a_0, D)}{\partial a_0^2}\right]+$$
$$+\frac{(\Delta a)^4}{4!}\left[\frac{9k_2^*}{16k_1^*}n_2^{(0)}\sqrt{\frac{fm_0}{a_0^5}}+a_0\frac{\partial^4 R_0^{(0)}(a_0)}{\partial a_0^4}+\right.$$
$$\left.+4\frac{\partial^3 R_0^{(0)}(a_0)}{\partial a_0^3}+a_0\frac{\partial^4 R_1^{(0)}(a_0, D)}{\partial a_0^4}+4\frac{\partial^3 R_1^{(0)}(a_0, D)}{\partial a_0^3}\right]=0. \quad (4.90)$$

Очевидно, что Δa можно искать в виде тригонометрического ряда

$$\Delta a=\sum_{j=1}^{\infty} a_j\cos jD. \quad (4.91)$$

Уравнение (89) решалось на ЭВМ БЭСМ-6 методом Ньютона. За начальное приближение бралось значение большой полуоси конкретного астероида из «Эфемерид малых планет» [135]. Выражение (91) для Δa подставлялось в (90) и требуемые преобразования для определения неизвестных коэффициентов a_j проводились с помощью ЭВМ БЭСМ-6. В конечном итоге получилась неоднородная нелинейная система алгебраических уравнений относительно a_j. Она решалась на ЭВМ методом простой итерации. Начальные условия подбирались из предположения, что a_j должны иметь порядок μ^{j+1}, где μ — малый параметр (масса Юпитера).

Таким образом, функция $\bar{a}(D)$ была представлена в виде тригонометрического ряда

$$a=\sum_{j=0}^{\infty} a_j\cos jD. \quad (4.92)$$

На самом деле из условий требуемой точности представления коэффициентов ряда на ЭВМ вытекает, что можно ограничиться в этом ряде восемью членами, так как μ^8 имеет порядок 10^{-24} и является практически машинным нулем. Вообще говоря, система для a_j получилась переопределенной, но после определения первых коэффициентов a_j из некоторой подсистемы этой системы полученные a_j подставлялись в остальные, неучтенные уравнения исходной системы. Эти уравнения с заданной точностью при найденных первых a_j удовлетворялись, поэтому можно считать, что с максимально возможной машинной точностью a_j являются искомым решением исходной системы.

Таким образом, оскулирующие большие полуоси $\bar{a}$ промежуточных орбит астероидов группы Минервы представляются в виде явной функции

$$\bar{a} = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos jD \tag{4.93}$$

аномалии Делоне D.

Полученное выше явное аналитическое представление оскулирующего элемента $\bar{a}$ позволяет перейти к отысканию явных аналитических выражений для остальных оскулирующих элементов промежуточной орбиты резонансного астероида из группы Минервы.

Из соотношения

$$\bar{n} = \sqrt{fm_0/\bar{a}^3} \tag{4.94}$$

видно, что среднее движение астероида $\bar{n}$ также можно искать в виде тригонометрического ряда по косинусам аргументов, кратных аномалии D:

$$\bar{n} = \sum_{j=0}^{\infty} n_j \cos jD \tag{4.95}$$

с неизвестными коэффициентами n_j.

Заменим в соотношении (94) элементы $\bar{a}$ и $\bar{n}$ соответствующими рядами (92) и (95). Как уже было отмечено выше, разложение для элемента $\bar{a}$ можно возвести в степень $-3/2$ по формуле бинома Ньютона, учитывая машинную точность определения коэффициентов в разложении (92), следующим образом:

$$\begin{aligned}
\bar{a}^{-3/2} &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} a_s \cos sD\right)^{-3/2} \approx \left(\sum_{s=0}^{N} a_s \cos sD\right)^{-3/2} = \\
&= a_0^{-3/2}\left(1 + \sum_{s=1}^{N} b_s \cos sD\right)^{-3/2} = a_0^{-3/2}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\sum_{s=1}^{N} b_s \cos sD\right) + \right.\\
&\quad + \frac{(3/2)(3/2+1)}{2!}\left(\sum_{s=1}^{N} b_s \cos sD\right)^2 - \frac{(3/2)(3/2+1)(3/2+2)}{3!}\times \\
&\quad \times\left(\sum_{s=1}^{N} b_s \cos sD\right)^3 + \frac{(3/2)(3/2+1)(3/2+2)(3/2+3)}{4!}\times \\
&\quad \left.\times\left(\sum_{s=1}^{N} b_s \cos sD\right)^4 + \ldots\right],
\end{aligned} \tag{4.96}$$

где $a_0 \gg a_s$, $b_s = a_s/a_0$ $(s = 1, \ldots, N)$.

Мы ограничились в разложении четвертой степенью суммы, исходя из точности представления коэффициентов a_j в разложении элемента $\bar{a}$. Каждую конечную сумму возводим в соответствующую степень, учитывая точность представления входящих в сумму коэффициентов разложения элемента $\bar{a}$. Сделав приведение подобных в выражении (96) и приравняв в левой и правой частях коэффициенты при косинусах одинаковых аргументов в соотношении (94), получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных n_j *):

$$n_0 = \sqrt{fm_0}\, a_0^{-3/2}\left(1 + \frac{15}{16} b_1^2 + \frac{15}{16} b_2^2 + \frac{15}{16} b_3^2 - \frac{315}{384} b_1^2 b_2 + \ldots\right),$$

$$n_1 = \sqrt{fm_0}\, a_0^{-3/2}\left(-\frac{3}{2} b_1 + \frac{15}{8} b_1 b_2 + \frac{15}{8} b_2 b_3 - \frac{315}{384} b_1^3 + \ldots\right), \tag{4.97}$$

. . . .

$$n_7 = -\frac{3}{2}\sqrt{fm_0}\, a_0^{-3/2} b_7 + \ldots$$

Решая эту систему относительно n_j, получим, учитывая точность представления элемента $\bar{a}$, конечное выражение для определения элемента $\bar{n}$ в виде многочлена

$$\bar{n} = \sum_{j=0}^{N} n_j \cos jD. \tag{4.98}$$

Определяя $\bar{n}$ таким образом, переходим к определению других оскулирующих элементов промежуточной орбиты астероида.

Параметр орбиты астероида $\bar{p}$ можно также искать в виде ряда

$$\bar{p} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \cos jD \tag{4.99}$$

с неизвестными коэффициентами p_j.

Из первого интеграла (71) выражаем оскулирующий параметр $\bar{p}$ с помощью равенства

$$\bar{p} = \frac{k_2^*}{k_1^*}\left(\bar{a} + C_1^2 - 2C_1\sqrt{\bar{a}}\right). \tag{4.100}$$

Заменив в этом равенстве функции $\bar{a}(D)$ и $\bar{p}(D)$ рядами (92) и (99), получим для p_j следующую систему уравнений:

$$k_1^{*2} p_0 = (k_2^*)^2 a_0 + (k_2^*)^2 C_1^2 - 2(k_2^*)^2 C_1 a_0^{1/2} + \frac{1}{8}(k_2^*)^2 C_1 a_0^{1/2} b_1^2 + \ldots$$

---

*) Здесь величина n_1 не совпадает с величиной из формулы (80).

$$k_1^* p_1 = (k_2^*)^2 a_1 - (k_2^*)^2 C_1 a_0^{1/2} b_1 + \left(\frac{1}{4} k_2^*\right)^2 C_1 a_0^{1/2} b_1 b_2 + \\ + \left(\frac{1}{4} k_2^*\right)^2 C_1 a_0^{1/2} b_2 b_3 + \ldots \quad (4.101)$$

. . . .

$$k_1^* p_7 = (k_2^*)^2 a_7 - (k_2^*)^2 C_1 a_0^{1/2} b_7 + \ldots$$

Бесконечную систему алгебраических уравнений (101) можно заменить конечной, исходя из требуемой точности определения коэффициентов в ряде (92). Зависимость коэффициентов p_j от малого параметра μ представляется соотношением $p_j \approx \mu^{j+1}$ ($j = 1, \ldots, 7$). Следует заметить, что при определении параметра $\bar{p}$ и ниже, при определении других неизвестных параметров, возведение ряда в произвольную степень осуществлялось также с помощью формулы бинома Ньютона. После определения элементов $\bar{a}$ и $\bar{p}$ можно перейти к нахождению элемента $\bar{e}$ — эксцентриситета орбиты, пользуясь соотношением

$$\bar{p} = \bar{a}(1 - \bar{e}^2). \quad (4.102)$$

Из представлений (92), (99) и соотношения (102) следует, что $\bar{e}$ можно искать в виде тригонометрического ряда по косинусам аргументов, кратных D:

$$\bar{e} = \sum_{j=0}^{\infty} e_j \cos jD \quad (4.103)$$

с неизвестными коэффициентами e_j.

Заменяя в соотношении (102) параметры $\bar{a}$, $\bar{p}$ и $\bar{e}$ соответствующими рядами и проведя требуемые преобразования, получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов e_j:

$$e_0 = a_0^{1/2} \rho_0^{1/2} \left(1 - \frac{1}{16}\rho_1^2 + \frac{3}{16} b_1^2 - \frac{1}{16}\rho_2^2 + \frac{3}{16} b_2^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{16}\rho_3^2 + \frac{3}{16} b_3^2 + \frac{105}{1024} b_1^4 + \ldots\right),$$

$$e_1 = a_0^{1/2} \rho_0^{1/2} \left(\frac{1}{2}\rho_1 - \frac{1}{2} b_1 + \frac{3}{64}\rho_1^3 - \frac{15}{64} b_1^3 - \frac{1}{8}\rho_1\rho_2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{8} b_1 b_2 + \frac{3}{2}\rho_1\rho_2^2 - \ldots\right), \quad (4.104)$$

. . . .

$$e_7 = a_0^{1/2} \rho_0^{1/2} \left(\frac{1}{2}\rho_7 - \frac{1}{2} b_7 - \ldots\right),$$

. . . .

где $\rho_0 = a_0 - p_0$, $\rho_i = (a_i - p_i)/\rho_0$, $b_i = a_i/a_0$, $i = 1, 2, \ldots$

Так как элементы $\bar{a}$ и $\bar{p}$ представляются конечными разложениями, бесконечная система (104) превращается в конечную систему, которую можно решить с помощью ЭВМ. В результате получаем конечное представление для элемента $\bar{e}$, коэффициенты e_j которого также связаны соотношением $e_j = O(\mu^{j+1})$ ($j = 1, \ldots, 7$), где μ — малый параметр.

Для определения $\bar{\omega} = \bar{\omega}(D)$ перейдем в интеграле (73) от переменной интегрирования t к переменной D, используя равенство (72):

$$\bar{\omega} - \omega_0 = -\int\limits_{D_0}^{D} \left[\sqrt{fm_0}\,(k_1^*\bar{n} - k_2^* n_2^{(0)}) - 2\sqrt{\bar{a}}\, k_1^* \frac{\partial \bar{\bar{R}}^{(0)}}{\partial \bar{a}} - \right.$$
$$\left. - 2\sqrt{\bar{p}}\, k_2^* \frac{\partial \bar{\bar{R}}^{(0)}}{\partial \bar{p}} \right]^{-1} \sqrt{\bar{p}} \frac{\partial \bar{\bar{R}}^{(0)}}{\partial \bar{p}}\, dD. \qquad (4.105)$$

Заменяя в этом равенстве $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\partial\bar{\bar{R}}^{(0)}/\partial\bar{a}$, $\partial\bar{\bar{R}}^{(0)}/\partial\bar{p}$ соответствующими выражениями и приводя подобные в числителе и знаменателе подынтегрального выражения, получим

$$\bar{\omega} - \omega_0 = \int\limits_{D_0}^{D} \left(\sum_{s=0}^{N} c_s \cos sD \Big/ \sum_{s=0}^{N} d_s \cos sD \right) dD. \qquad (4.106)$$

Проведя операцию деления многочлена на многочлен и проинтегрировав в заданных пределах, получим ряд по синусам

$$\bar{\omega} - \omega_0 = \omega_0^{(0)} + \omega_0^* D + \omega_1 \sin D + \omega_2 \sin 2D + \ldots, \qquad (4.107)$$

где

$$\omega_0^{(0)} = -\omega_0^* D_0 - \omega_1 \sin D_0 - \omega_2 \sin 2D_0 - \ldots, \qquad (4.108)$$

а ω_i определяются из системы алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned}
c_0 &= d_0\omega_0 + \frac{1}{2} d_1\omega_1 + \frac{1}{4} d_2\omega_2 + \ldots,\\
c_1 &= d_1\omega_0 + \left(d_0 + \frac{1}{2} d_2\right)\omega_1 + \frac{1}{4} d_1\omega_2 + \ldots,\\
c_2 &= d_2\omega_0 + \frac{1}{2} d_1\omega_1 + \frac{1}{2} d_0\omega_2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (4.109)$$

Учитывая конечный вид представлений элементов $\bar{a}$, $\bar{p}$ и возмущающей функции $\bar{\bar{R}}^{(0)}$, бесконечную систему (109) можно заменить конечной, из которой итерационным методом можно получить с помощью ЭВМ искомые значения ω_i.

Аналогичным образом определяется зависимость t от аномалии Делоне D из интеграла (74), который можно переписать следующим образом:

$$t - t_0 = \int\limits_{D_0}^{D} \frac{\sqrt{fm_0}\, dD}{\sqrt{fm_0}\left(k_1^* \bar{n} - k_2^* n_2^{(0)}\right) - 2k_1^* \sqrt{\bar{a}}\, \partial \bar{\bar{R}}^{(0)}/\partial \bar{a} - 2k_2^* \sqrt{\bar{p}}\, \partial \bar{\bar{R}}^{(0)}/\partial \bar{p}}. \tag{4.110}$$

В числителе этого выражения — постоянное число, а знаменатель совпадает со знаменателем выражения (105). Следовательно, для определения $t = t(D)$ можно написать

$$t - t_0 = \int\limits_{D_0}^{D} (T_0 + T_1 \cos D + T_2 \cos 2D + \ldots)\, dD. \tag{4.111}$$

Коэффициенты T_i определяются из уравнений (109), если произвести замену:

$$c_0 = \sqrt{fm_0}, \quad c_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Проинтегрировав (111) в заданных пределах, будем иметь

$$t - t_0 = T_0^{(0)*} + T_0^* D + T_1^* \sin D + T_2^* \sin 2D + \ldots,$$

где

$$\begin{gathered} T_0^* = T_0, \quad T_1^* = T_1, \quad T_2^* = T_2/2, \ \ldots, \\ -T_0^{(0)*} = T_0^* D_0 + T_1^* \sin D_0 + T_2^* \sin 2D_0 + \ldots \end{gathered} \tag{4.112}$$

Нам осталось определить среднюю аномалию $\overline{M}$ астероида в орбите. Для этого воспользуемся формулой

$$\overline{M} = \left[D - k_2^* (\bar{\omega} - l)\right]/k_1^*. \tag{4.113}$$

Заменяя $\bar{\omega}$ выражением (107), получим формулу

$$-\overline{M} - M_0 = M_0^{(0)} + M_0 D + M_1 \sin D + M_2 \sin 2D + \ldots, \tag{4.114}$$

где $M_0^{(0)} = M_0 D_0 + M_1 \sin D_0 + M_2 \sin 2D_0 + \ldots$

Таким образом, мы получили явные аналитические зависимости для оскулирующих усредненных элементов $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{e}$, $\bar{\omega}$, $\overline{M}$ как функций аномалии Делоне D, а также зависимость $t = t(D)$, не содержащие вековых членов, а выражающиеся только через тригонометрические функции. Отсюда можно сделать вывод, что даже в случае точного резонанса средних движений в усредненной ограниченной круговой задаче трех тел эти элементы изменяются колебательным, а не вековым образом.

Чтобы иметь явную зависимость элементов промежуточной орбиты от времени, следует найти обратную функцию $D = D(t)$ и затем подставить ее в выражения для оскулирующих элементов. Однако при наличии современных вычислительных машин проще для каждого заданного момента времени t с помощью одного из методов итерации определить соответствующее значение D, а затем найти значения всех элементов орбиты астероида на этот момент времени. Заметим, что такая процедура более целесообразна и экономна. Она в задаче двух тел практически использовалась всегда, с той лишь разницей, что вместо (74) решалось знаменитое уравнение Кеплера [7]

$$E - e\sin E = M,$$

где E, M — эксцентрическая и средняя аномалии небесного тела.

§ 4.6. Приведение квазилинейных уравнений в частных производных к бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Основные результаты по применению метода усреднения к уравнениям математической физики получены математиками Киевской школы, в первую очередь Ю. А. Митропольским и Б. И. Мосеенковым. Ими же написана большая и единственная в своем роде монография [136], посвященная этим вопросам. Материал, включенный в этот параграф, заимствован в основном из этой монографии и имеет чисто прикладной характер. Читателя, интересующегося математическими проблемами обоснования метода усреднения в уравнениях математической физики, отсылаем к статьям [137, 138] и уже цитированной монографии [136].

Рассмотрим метод Фурье [139] применительно к нелинейным уравнениям в частных производных гиперболического типа, близким к линейным. Он в сочетании с методом усреднения позволяет во многих случаях исследовать колебательные процессы в системах с распределенными параметрами.

Сущность такого подхода состоит в том, что одно уравнение в частных производных заменяется бесконечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, а к последней возможно применение (по крайней мере формальное) метода сглаживания, изложенного в предыдущих параграфах. Существуют различные методы приведения одного или нескольких уравнений с распределенными параметрами к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы здесь в основном будем пользоваться хорошо известным методом Бубнова — Галеркина [140].

Следует заметить, что метод усреднения эффективнее в тех случаях, когда, пользуясь методом Фурье, можно в соответствующих уравнениях в частных производных разделить переменные, после чего полученные счетные системы обыкновенных дифференциальных уравнений приводятся к стандартной по Н. Н. Боголюбову форме [29].

Изложение единой методики, примененной к самому общему виду нелинейного уравнения в частных производных гиперболического типа, близкого к линейному, вызывает ряд существенных трудностей и громоздкие выкладки, поэтому проиллюстрируем ее на некоторых конкретных уравнениях в частных производных.

Рассмотрим нелинейное уравнение гиперболического типа с постоянными коэффициентами, близкое к линейному:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}+C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+D\frac{\partial u}{\partial t}+E\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+Gu=\mu F\left(t,\ x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (4.115)$$

где $\mu>0$ — малый параметр, F — нелинейная относительно своих аргументов функция, а постоянные коэффициенты A, B, C удовлетворяют условию гиперболичности [139]

$$B^2-AC>0. \quad (4.116)$$

С помощью хорошо известных замен зависимых и независимых переменных уравнение (115) может быть преобразовано к простейшему каноническому виду (для новых переменных сохранены те же обозначения u, x, t и F), приведенному во многих учебниках по математической физике [139, 140]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\lambda u+\mu F\left(t,\ x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x}\right). \quad (4.117)$$

Предположим, что требуется найти решения этого уравнения при следующих краевых и начальных условиях:

$$u(0,\ t)=u(l,\ t)=0, \quad (4.118)$$
$$u|_{t=0}=f(x),\quad \partial u/\partial t|_{t=0}=\Phi(x), \quad (4.119)$$

где $f(x)$ и $\Phi(x)$ — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие необходимым условиям существования решений.

Прежде чем переходить к дальнейшему преобразованию уравнения (117), рассмотрим невозмущенное уравнение, получаемое из уравнения (117) при $\mu=0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\lambda u \quad (4.120)$$

при тех же краевых и начальных условиях. Оно представляет собой аналог порождающего уравнения для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. §§ 1.7—1.9).

Предполагая, что $(n\pi a l^{-1})^2-\lambda>0$ для $n=1,\ 2,\ \ldots,$ с помощью метода Фурье находим решение уравнения (120) в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4.121}$$

где $\omega_n = \sqrt{(n\pi a l^{-1})^2 - \lambda}$ — частоты нормальных колебаний, A_n и B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — постоянные, определяемые начальными условиями (119).

Исходя из вида решения (121) невозмущенного уравнения (120) и предполагая, что при достаточно малом μ формы нормальных колебаний при наличии возмущений с достаточной точностью определяются теми же функциями $\sin(n\pi x/l)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, будем искать решение возмущенного уравнения (117) в виде ряда

$$u(t, x, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t, \mu)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4.122}$$

где $z_n(t, \mu)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — функции, подлежащие определению. Вид (122) решения типичен для хорошо известного метода Бубнова — Галеркина [141]. Подставляя (122) в уравнение (117) и в начальные условия (119), умножая затем на $\sin(m\pi x/l)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и интегрируя по x в пределах от 0 до l, для определения $z_n(t, \mu)$ получим бесконечную счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d^2 z_n/dt^2 + \omega_n^2 z_n = \mu F_n(t, z_1, z_2, \ldots; \dot z_1, \dot z_2, \ldots), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.123}$$

с начальными условиями

$$z_n|_{t=0} = f_n, \quad dz_n/dt|_{t=0} = \Phi_n, \tag{4.124}$$

где f_n и Φ_n — коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $\Phi(x)$ соответственно.

Приведем теперь систему уравнений (123) к стандартной форме в смысле Боголюбова. Для этого введем вместо z_n и $\dot z_n$ новые медленно меняющиеся комплексно-сопряженные переменные x_n и $x_{-n} = \bar{x}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ с помощью формул [29]

$$z_n = x_n \exp\{i\omega_n t\} + x_{-n}\exp\{-i\omega_n t\}, \tag{4.125}$$

$$dz_n/dt = i\omega_n x_n \exp\{i\omega_n t\} - i\omega_n x_{-n}\exp\{-i\omega_n t\}. \tag{4.126}$$

После некоторых преобразований можно получить систему

$$\begin{aligned} &\frac{dx_n}{dt}\exp\{i\omega_n t\} + \frac{dx_{-n}}{dt}\exp\{-i\omega_n t\} = 0,\\ &i\omega_n\frac{dx_n}{dt}\exp\{i\omega_n t\} - i\omega_n\frac{dx_{-n}}{dt}\exp\{-i\omega_n t\} = \mu F_n. \end{aligned} \tag{4.127}$$

Так как $\omega_{-n}=\omega_n$, то можно показать, что $F_{-n}=F_n$. Разрешая систему (127) относительно $\dot{x}_n$ и $\dot{x}_{-n}$, окончательно получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений в стандартной форме, эквивалентную системе (123):

$$dx_n/dt=\mu X_n(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots;\ x_{-1},\ x_{-2},\ \ldots),\qquad n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \tag{4.128}$$

где

$$X_n(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots;\ x_{-1},\ x_{-2},\ \ldots)=$$
$$=\frac{1}{2i\omega_n}\exp\{i\omega_n t\}F_n(t,\ x_1\exp\{i\omega_1 t\}+x_{-1}\exp\{i\omega_{-1}t\},\ \ldots;$$
$$i\omega_1 x_1\exp\{i\omega_1 t\}+i\omega_{-1}x_{-1}\exp\{i\omega_{-1}t\},\ \ldots),\quad n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Из выражений (125), (126) и начальных условий (124) можно также получить начальные условия для искомых функций, определяемых системой уравнений в стандартной форме (128). Вводя обозначения $f_{-n}=f_n$, $\Phi_{-n}=\Phi_n$, находим их в следующем виде:

$$x_n|_{t=0}=(\Phi_n+i\omega_n f_n)/(2i\omega_n),\quad n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \tag{4.129}$$

где f_n и Φ_n — коэффициенты Фурье из (124).

Применим теперь принцип усреднения к системе (128), т. е. выпишем усредненную систему, используя оператор M_t (см. § 1.3):

$$d\bar{x}_n/dt=\mu M_t[X_n(t,\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots)],\ n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \tag{4.130}$$

при начальных условиях $\bar{x}_n|_{t=0}=x_n|_{t=0}$. В отдельных случаях, когда аналитическая структура системы (130) позволяет определять неизвестные функции последовательно или же искомые функции $\bar{x}_n(t,\ \mu)$ убывают по норме быстро с номером n, тогда можно на практике заменить бесконечномерную систему некоторой конечномерной. Для этих случаев методика приведения к счетной системе уравнений в сочетании с методом усреднения несомненно, представляет практический интерес, хотя теоретические вопросы обоснования подобной процедуры далеки от полного решения.

Проиллюстрируем ее на нескольких простейших примерах [136], в которых усредненные уравнения позволяют определить последовательно все неизвестные функции $\bar{x}_n(t,\ \mu)$ $(n=\pm 1,$ $\pm 2,\ \ldots)$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\lambda u+\mu A(t,\ x)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.131}$$

с краевыми и начальными условиями вида (118) и (119).

Предположим, что $\lambda\neq 0$. Тогда $k\omega_1\neq\omega_k$ $(k=2,\ 3,\ \ldots)$, т. е. в системе отсутствует внутренний резонанс. Допустим для опр деленности, что функция $A(t, x)$ имеет вид $A(t, x) = \cos(\omega_1 t)\cos(\pi x/l)$, т. е. частота внешней силы равна частоте первого нормального колебания невозмущенной системы.

Тогда, поступая согласно изложенному методу, получим следующую усредненную систему:

$$\begin{gathered}
\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \frac{\mu\pi}{16\omega_1 l}\left(2\bar{x}_1\bar{x}_{-1} + \bar{x}_1^2\right), \\
\frac{d\bar{x}_{-1}}{dt} = -\frac{\mu\pi}{16\omega_1 l}\left(2\bar{x}_{-1}\bar{x}_1 + \bar{x}_{-1}^2\right), \\
\frac{d\bar{x}_k}{dt} = \frac{\mu\pi}{8\omega_k l}\left(\bar{x}_1 + \bar{x}_{-1}\right)\bar{x}_k, \quad \omega_{-k} = -\omega_k, \quad k = \pm 2, \pm 3, \ldots
\end{gathered} \tag{4.132}$$

Очевидно, что, определив из первых двух уравнений этой системы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_{-1}$, можно без затруднений найти все $\bar{x}_k$.

Пример 2. Рассмотрим метод приведения уравнения в частных производных к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений применительно к следующему нелинейному уравнению:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t} = \mu f(t, u), \tag{4.133}$$

встречающемуся в задачах об изгибных колебаниях балок, находящихся на упругом основании под воздействием внешних возмущающих сил [136].

Предположим, что в уравнении (133) $a \neq 0$ и $\mu > 0$ — малый параметр, а $f(t, u)$ является аналитической относительно u функцией, не содержащей в своем разложении свободных членов с коэффициентами, зависящими от t.

При этих условиях для уравнения (133) требуется найти решение $u = u(t, x)$, удовлетворяющее краевым и начальным условиям [136]

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0, \tag{4.134}$$

$$u|_{t=0} = f_1(x), \quad \partial u/\partial t|_{t=0} = F(x). \tag{4.135}$$

Предположим, что имеют место абсолютно сходящиеся разложения

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$\alpha_k = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad \beta_k = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$|\alpha_k| \leqslant M/k^2, \quad |\beta_k| \leqslant M/k^2, \quad M = \text{const}.$$

Тогда, отыскивая решение уравнения (133), удовлетворяющее краевым и начальным условиям (134) и (135), в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

для определения неизвестных коэффициентов $z_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d^2 z_n/dt^2 + \omega_n^2 z_n = \mu f_n(t, z_1, z_2, \ldots), \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad (4.136)$$

с начальными условиями $z_n(0) = \alpha_n$, $dz_n/dt|_{t=0} = \beta_n$, где

$$\omega_n^2 = n^2\pi^2/(al^2),$$

$$f_n = \frac{2}{a^2 l} \int_0^l f\left[t, \sum_{m=1}^{\infty} z_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l}\right] \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Производя в уравнениях (136) замену переменных согласно формулам (125) и (126), вновь приходим к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений в стандартной форме типа (128), к которым возможно применить метод усреднения.

Пример 3. Изучим теперь поперечные колебания балки длины l, неподвижно закрепленной на концах и находящейся под нагрузкой $p(t, x)$, распределенной по ее длине (рис. 13).

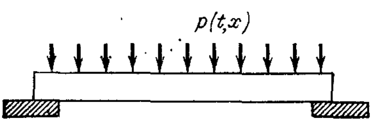

Рис. 13. Изображение прямоугольной горизонтальной балки, на которую действует поперечная нагрузка $p(t, x)$

Уравнение поперечных колебаний балки имеет вид [142]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + ku = p(t, x) + \mu\varphi(u, \dot{u}) + \mu N(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.137)$$

где ρ — линейная плотность массы, I — момент инерции поперечного сечения, E — модуль упругости материала балки, φ — реакция основания, на котором лежит балка, N — продольное усилие, возникающее в балке в результате удлинения нейтральной линии и равное

$$N(u) = \frac{ES}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx, \quad (4.138)$$

S — площадь поперечного сечения, $k = \mathrm{const}$, μ — малый положительный параметр.

В уравнении (137) искомой функцией является $u(t, x)$ — поперечное перемещение балки в точке x в момент времени t.

Как видно из (137) и (138), этот колебательный процесс является нелинейным, и его исследование в общем случае представляется невозможным. Поэтому допустим также, что возмущающая нагрузка имеет порядок малости μ, т. е.

$$p(t, x) = \mu q(t, x). \tag{4.139}$$

Применим к уравнению метод Бубнова — Галеркина [141]. Решение уравнения (137) будем искать в виде ряда (122). Аналогично (123) здесь получаем счетную систему [17]

$$\begin{gathered} d^2z_n/dt^2 + \omega_n^2 z_n = \mu Z_n(t, z_1, z_2, \ldots; \dot z_1, \dot z_2, \ldots), \\ n = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{4.140}$$

$$\rho Z_n = q_n(t) + \varphi_n(z_1, z_2, \ldots; \dot z_1, \dot z_2, \ldots) - ES\frac{(n\pi)^2}{l^2} z_n \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(s\pi)^2 z_s^2}{4l^2},$$

где $q_n(t)$, $\varphi_n(z_1, z_2, \ldots; \dot z_1, \dot z_2, \ldots)$ — коэффициенты в разложениях Фурье для $q(t, x)$ и $\varphi(u, \dot u)$ по фундаментальным функциям $\sin(n\pi x/l)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Уравнения (140) приводятся к стандартной в смысле Боголюбова форме

$$\begin{gathered} \dot x_n = \frac{\mu}{2i\omega_n} \exp\{-i\omega_n t\} X_n(t, x_1 \exp\{i\omega_1 t\} + x_{-1}\exp\{-i\omega_1 t\}, \ldots), \\ \dot x_{-n} = \frac{\mu}{2i\omega_n} \exp\{i\omega_n t\} X_n(t, x_1 \exp\{i\omega_1 t\} + x_{-1}\exp\{-i\omega_1 t\}, \ldots). \end{gathered} \tag{4.141}$$

Чтобы конструктивную сторону дела можно было бы довести до конца, необходимо конкретизировать функции, входящие в уравнения. Поэтому предположим, что функция φ_1 имеет кубическую нелинейность:

$$\varphi_1(t, x, u, \dot u) = p(t, x) + (\alpha + \beta u + \gamma u^2)\dot u,$$

где α, β, γ — заданные константы.

Представим коэффициент Фурье φ_n формулой

$$\varphi_n = J_n' + J_n'' + J_n''',$$

где

$$J_n' = \frac{2\alpha}{l}\int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} \dot z_k \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$J_n'' = \frac{2\beta}{l}\int_0^l \sum_{m,s=1}^{\infty} z_m \dot z_s \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{s\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{\beta}{2l} \int_0^l \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sin \frac{(k-n)\pi x}{l} + \sin \frac{(k+n)\pi x}{l} \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=2}^{\infty} b_j \left(\sin \frac{(j-n)\pi x}{l} + \sin \frac{(j+n)\pi x}{l} \right) \right] dx,$$

$$a_k = \sum_{s=1}^{\infty} z_{k+s} \dot{z}_s, \qquad b_j = \sum_{s=1}^{j-1} z_{j-s} \dot{z}_s;$$

$$J_n''' = \frac{\gamma}{4l} \int_0^l \left[\sum_{k_1=0}^{\infty} A_{k_1} \left(\cos \frac{(k_1-n)\pi x}{l} - \cos \frac{(k_1+n)\pi x}{l} \right) + \right.$$

$$+ \sum_{k_2=1}^{\infty} B_{k_2} \left(\cos \frac{(k_2-n)\pi x}{l} - \cos \frac{(k_2+n)\pi x}{l} \right) -$$

$$- \sum_{k_3=1}^{\infty} C_{k_3} \left(\cos \frac{(k_3-n)\pi x}{l} - \cos \frac{(k_3+n)\pi x}{l} \right) -$$

$$\left. - \sum_{k_4=1}^{\infty} D_{k_4} \left(\cos \frac{(k_4-n)\pi x}{l} - \cos \frac{(k_4+n)\pi x}{l} \right) \right] dx,$$

где

$$A_{k_1} = \sum_{k,s=1}^{\infty} z_{k_1+k+s} z_k \dot{z}_s, \qquad B_{k_2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{k_2-1} z_{k_2+k-s} z_k \dot{z}_s,$$

$$C_{k_3} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_3+s-1} z_{k_3-k+s} z_k \dot{z}_s, \qquad D_{k_4} = \sum_{s=1}^{k_4-1} \sum_{k=1}^{k_4-s-1} z_{k_4-k-s} z_k \dot{z}_s.$$

Рассмотрим более подробно выражения для J_n', J_n'', J_n'''. Очевидно, что в силу ортогональности тригонометрических функций получаем $J_n' = 0$ при $k \neq n$ и $J_n' = \alpha \dot{z}_n$ при $k = n$.

Пусть числа $k \pm n$, $j \pm n$ являются нечетными, т. е. предположим, что:

а) n нечетное и k, j четные. Тогда

$$J_n'' = \frac{4\beta}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(a_{2k} - b_{2k})}{4k^2 - (2n-1)^2};$$

б) n четное и k, j нечетные. Тогда

$$J_n'' = \frac{2\beta}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)\, a_{2k-1}}{(2k-2n-1)(2k+2n-1)} - \frac{2\beta}{l} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-1)\, b_{2k-1}}{(2k-2n-1)(2k+2n-1)}.$$

При четных значениях $k \pm n$ и $j \pm n$ $J_n'' = 0$.

После некоторых преобразований и вычислений можно найти, что при $n > 2$

$$J_n''' = \gamma (A_n + B_n - C_n - D_n)/4.$$

Если $n = 1, 2$, то

$$J_n''' = \gamma (A_n + B_n - C_n)/4.$$

Если воспользоваться выражением для $\varphi_1(t, x, u, \dot u)$, то системе (140) можно придать вид

$$\frac{d^2 z_n}{dt^2} + \omega_n^2 z_n = \frac{\mu}{\rho}\left[q_n(t) + \alpha \dot z_n + J_n'' + J_n''' - ESz_n \frac{(n\pi)^2}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k\pi z_k)^2}{4l^2}\right]. \tag{4.142}$$

Применяя к уравнению (142) замену (125), (126), получим

$$\begin{gathered}\dot x_n = \mu\left[\frac{q_n(t)}{2\rho i\omega_n}\exp\{-i\omega_n t\} + \right.\\ + \frac{\alpha}{2\rho}(x_n - x_{-n}\exp\{-2i\omega_n\}) + \frac{1}{2\rho i\omega_n}\exp\{-i\omega_n t\}(J_n'' + J_n''') - \\ - \frac{ES(n\pi)^2}{8\rho i l^2\omega_n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left(x_k^2 x_n \exp\{2i\omega_n t\} + 2x_k x_{-k} x_n + \right.\\ + x_{-k}^2 x_n \exp\{-2i\omega_n t\} + x_k^2 x_{-n}\exp\{2i(\omega_k - \omega_n)t\} + \\ \left.\left. + 2x_k x_{-k} x_{-n}\exp\{-2i\omega_n t\} + x_{-k}^2 x_{-n}\exp\{-2i(\omega_k + \omega_n)t\}\right)\right],\end{gathered} \tag{4.143}$$

$$\begin{gathered}\dot x_{-n} = -\mu\left[\frac{q_n(t)}{2\rho i\omega_n}\exp\{i\omega_n t\} + \right.\\ + \frac{\alpha}{2\rho}(x_n\exp\{2i\omega_n t\} - x_{-n}) + \frac{1}{2\rho i\omega_n}\exp\{i\omega_n t\}(J_n'' + J_n''') - \\ - ES\frac{(n\pi)^2}{8\rho i l^2\omega_n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(2x_k x_{-k} x_{-n} + x_k^2 x_n\exp\{2i(\omega_k + \omega_n)t\} + \right.\\ + 2x_k x_{-k} x_n \exp\{2i\omega_n t\} + x_{-k}^2 x_n \exp\{2i(\omega_n - \omega_k)t\} + \\ \left.\left. + x_k^2 x_{-n}\exp\{2i\omega_k t\} + x_k^2 x_{-n}\exp\{-2i\omega_n t\}\right)\frac{(k\pi)^2}{l^2}\right].\end{gathered} \tag{4.144}$$

Предположим теперь, что нелинейное возмущение μX_n является периодической функцией t, и рассмотрим два случая:

1) Пусть коэффициенты Фурье $q_n(t)$ нагрузки имеют вид $q_n(t) = q_n^{(0)}\sin\nu t$, где ν не зависит от n. Тогда, усредняя

уравнения (143), (144) по t, будем иметь

$$\dot{\bar{x}}_n = \mu\bar{x}_n\left[\frac{\alpha}{2\rho} - \frac{ES(n\pi)^2}{8\rho i l^2\omega_n}\bar{x}_n\bar{x}_{-n} - \frac{\gamma}{8}\bar{x}_n\bar{x}_{-n} - \right.$$
$$\left. - \frac{ES(n\pi)^2}{4\rho i l^2\omega_n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k\pi)^2}{l^2}\bar{x}_k\bar{x}_{-k}\right] - \mu a_n, \qquad (4.145)$$

$$\dot{\bar{x}}_{-n} = -\mu\bar{x}_{-n}\left[-\frac{\alpha}{2\rho} - \frac{ES(n\pi)^2}{8\rho i l^2\omega_n}\bar{x}_n\bar{x}_{-n} + \frac{\gamma}{8}\bar{x}_n\bar{x}_{-n} - \right.$$
$$\left. - \frac{ES(n\pi)^2}{4\rho i l^2\omega_n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k\pi)^2}{l^2}\bar{x}_k\bar{x}_{-k}\right] - \mu a_{-n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (4.146)$$

где $a_n = 0$ при $\omega_n \neq \nu$ и $a_n = q_n/(4\rho\omega_n)$, если $\omega_n = \nu$ при некотором $n = n_0$.

Условие $\omega_{n_0} = \nu$ указывает на наличие резонанса между частотой ω_n собственных колебаний балки и частотой ν приложенной нагрузки.

Хотя системы усредненных уравнений (145), (146) являются нелинейными, их интегрирование в случае отсутствия резонанса может быть выполнено. Для этого умножим (145) на $\bar{x}_{-n}$, (146) — на $\bar{x}_n$ и сложим:

$$\dot{\bar{x}}_n\bar{x}_{-n} + \dot{\bar{x}}_{-n}\bar{x}_n = \frac{\mu\alpha\bar{x}_n\bar{x}_{-n}}{\rho} - \frac{\mu\gamma(\bar{x}_n\bar{x}_{-n})^2}{4\rho}.$$

Это уравнение является известным уравнением Бернулли [19] для функции $\bar{x}_n\bar{x}_{-n}$. Решая его при заданных начальных условиях $\bar{x}_n(0)\bar{x}_{-n}(0)$, будем иметь

$$\bar{x}_n(t)\bar{x}_{-n}(t) =$$
$$= 4\alpha\bar{x}_n(0)\bar{x}_{-n}(0)\exp\{\mu\alpha t/\rho\}[4\alpha - \gamma\bar{x}_n(0)\bar{x}_{-n}(0)(\exp\{\mu\alpha t/\rho\} - 1)]^{-1}.$$

После подстановки этого выражения в правые части системы (145), (146) и интегрирования находим

$$\bar{x}_n(t) = \bar{x}_n(0)\exp\{\lambda_n(t)\}, \quad \bar{x}_{-n}(t) = \bar{x}_{-n}(0)\exp\{\lambda_{-n}(t)\},$$

где

$$\lambda_n(t) =$$
$$= \frac{\mu\alpha t}{2\rho} - 0{,}5\left[1 + \frac{ESn^2\pi^2}{i\gamma l^2\omega_n}\right]\ln\left[1 + \gamma\bar{x}_n(0)\bar{x}_{-n}(0)\frac{1}{4\alpha}\left(\exp\left\{\frac{\mu\alpha t}{\rho}\right\} - 1\right)\right] -$$
$$- \frac{ESn^2\pi^2}{i\gamma l^2\omega_n}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s^2\pi^2}{l^2}\ln\left[1 + \gamma\bar{x}_s(0)\bar{x}_{-s}(0)\frac{1}{4\alpha}\left(\exp\left\{\frac{\mu\alpha t}{\rho}\right\} - 1\right)\right],$$

$$\lambda_{-n}(t) =$$
$$= \frac{\mu\alpha t}{2\rho} + 0{,}5\left(-1 + \frac{ESn^2\pi^2}{i\gamma l^2\omega_n}\right)\ln\left[1+\gamma\bar{x}_n(0)\,\bar{x}_{-n}(0)\frac{1}{4\alpha}\left(\exp\left\{\frac{\mu\alpha t}{\rho}\right\}-1\right)\right]+$$
$$+\frac{ESn^2\pi^2}{i\gamma l^2\omega_n}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s^2\pi^2}{l^2}\ln\left[1+\gamma\bar{x}_s(0)\,\bar{x}_{-s}(0)\frac{1}{4\alpha}\left(\exp\left\{\frac{\mu\alpha t}{\rho}\right\}-1\right)\right],$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Если $\gamma = 0$ ($\varphi_1(t, x, u, \dot{u}) = p(t, x) + (\alpha + \beta u)\dot{u}$, т. е. имеет лишь квадратичную нелинейность) и нет резонанса между частотами ω_n и ν, тогда усредненная система (145), (146) принимает вид

$$\dot{\bar{x}}_n = \mu\bar{x}_n\left[\frac{\alpha}{2\rho} - \frac{ES(n\pi)^2}{8\rho i l^2\omega_n}\bar{x}_n\bar{x}_{-n} - \frac{ES(n\pi)^2}{4\rho i l^2\omega_n}\sum_{s=1}^{\infty}(s\pi)^2\bar{x}_s\bar{x}_{-s}\right], \tag{4.147}$$

$$\dot{\bar{x}}_n = \mu\bar{x}_{-n}\left[\frac{\alpha}{2\rho} + \frac{ES(n\pi)^2}{8\rho i l^2\omega_n}\bar{x}_n\bar{x}_{-n} + \frac{ES(n\pi)^2}{4\rho i l^2\omega_n}\sum_{s=1}^{\infty}(s\pi)^2\bar{x}_s\bar{x}_{-s}\right]. \tag{4.148}$$

В этом случае очевидно, что будем иметь

$$\dot{\bar{x}}_n\bar{x}_{-n} + \dot{\bar{x}}_{-n}\bar{x}_n = \mu\alpha\bar{x}_n\bar{x}_{-n}/\rho.$$

В отличие от предыдущего случая это уравнение является линейным. Его интегрирование дает

$$\bar{x}_n(t)\,\bar{x}_{-n}(t) = \bar{x}_n(0)\,\bar{x}_{-n}(0)\exp\{\mu\alpha t/\rho\},$$
$$\bar{x}_n(t) = \bar{x}_n(0)\exp\{\lambda'_n(t)\},$$
$$\bar{x}_{-n}(t) = \bar{x}_{-n}(0)\exp\{\lambda'_{-n}(t)\},$$

где

$$\lambda'_n(t) = \frac{\mu\alpha t}{2\rho} - \frac{ES(n\pi)^2}{8\rho i l^2\omega_n}\bar{x}_n(0)\,\bar{x}_{-n}(0)\left(\exp\left\{\frac{\mu\alpha t}{\rho}\right\}-1\right) -$$
$$-\frac{ES(n\pi)^2}{4\rho i l^2\omega_n}\left(\exp\left\{\frac{\mu\alpha t}{\rho}\right\}-1\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k\pi)^2}{l^2}\bar{x}_k(0)\,\bar{x}_{-k}(0),$$

$$\lambda'_{-n}(t) = \frac{\mu\alpha t}{2\rho} + \frac{ES(n\pi)^2}{8\rho i l^2\omega_n}\bar{x}_n(0)\,\bar{x}_{-n}(0)\left(\exp\left\{\frac{\mu\alpha t}{\rho}\right\}-1\right) +$$
$$+\frac{ES(n\pi)^2}{4\rho i l^2\omega_n}\left(\exp\left\{\frac{\mu\alpha t}{\rho}\right\}-1\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k\pi)^2}{l^2}\bar{x}_k(0)\,\bar{x}_{-k}(0).$$

В случае резонанса $\omega_{n_0} = \nu$ счетная система (145), (146) может рассматриваться как две подсистемы: резонансная, состоящая всего из двух уравнений с неизвестными функциями $\bar{x}_{n_0}(t)$, $\bar{x}_{-n_0}(t)$, и нерезонансная счетная подсистема для всех остальных неизвестных функций; последняя также может быть проинтегрирована в компактном виде с помощью описанного выше приема в том смысле, что находятся произведения $\bar{x}_n\bar{x}_{-n}$ при $n \neq n_0$. Что касается резонансной подсистемы, то она в конечном итоге принимает вид

$$\dot{\bar{x}}_{n_0} = \mu\bar{x}_{n_0}\left\{\frac{\alpha}{2\rho} - \bar{x}_{n_0}\bar{x}_{-n_0}\left[\frac{\gamma}{8\rho} + \frac{3ES(n_0\pi)^2}{8\rho i l^2\omega_{n_0}}\right] + A(t)\right\} - \mu a_{n_0},$$

$$\dot{\bar{x}}_{-n_0} = \mu\bar{x}_{-n_0}\left\{\frac{\alpha}{2\rho} + \bar{x}_{n_0}\bar{x}_{-n_0}\left[\frac{\gamma}{8\rho} + \frac{3ES(n_0\pi)^2}{8\rho i l^2\omega_{n_0}}\right] + A(t)\right\} - \mu a_{n_0},$$

где $A(t)$ — функция времени, известная в результате интегрирования нерезонансной подсистемы. Интегрирование этой пары уравнений в компактной форме не представляется возможным, поэтому здесь следует применять какие-либо другие аналитические или численные методы. Таким образом, точность решения всей счетной системы дифференциальных уравнений определяется точностью решения резонансной подсистемы, но важно отметить, что после нахождения решений резонансной подсистемы вся счетная система расщепляется на отдельные линейные дифференциальные уравнения, решение которых находится по известным формулам. Заметим, что при больших n_0 резонанс $\omega_{n_0} = \nu$ не играет большой роли, так как в приложениях мы ограничиваемся вычислением относительно небольшого числа функций $\bar{x}_n$, $\bar{x}_{-n}$.

2) Пусть нагрузка $q(t, x)$ является условно-периодической функцией времени со спектром частот $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$. Тогда ее коэффициенты Фурье имеют вид

$$q_s(t) = q_s^{(0)} \exp\{i\nu_s t\}. \tag{4.149}$$

В отличие от предыдущего случая здесь могут иметь место многие (и даже бесконечное число) резонансные отношения вида

$$\nu_s = \omega_n. \tag{4.150}$$

Если теперь провести усреднение по t уравнений (143) и (144), то мы получим ту же систему (145), (146) с той лишь разницей, что если в случае 1) только одна пара уравнений (с индексом n_0) могла иметь отличное от нуля постоянное слагаемое μa_{n_0}, то здесь таких пар может быть, вообще говоря, бесконечное множество.

Иными словами, и резонансная, и нерезонансная подсистемы могут содержать бесконечное число уравнений. Нерезонансная подсистема может быть проинтегрирована с помощью той же методики, а что касается резонансной подсистемы, то здесь вопрос остается открытым. На практике существенно, при каких значениях s и n возможны резонансы вида (150). Кроме того, как и в случае 1), здесь также возможна нерезонансная ситуация, когда ни при каких s и n равенство (150) не имеет места. Тогда, естественно, системы (145), (146) оказываются интегрируемыми в компактной форме. Хотим обратить внимание читателя на одно немаловажное обстоятельство.

Мы научились интегрировать усредненные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Вопрос же о близости функций $\bar{x}_n(t)$, $\bar{x}_{-n}(t)$ к функциям $x_n(t)$, $x_{-n}(t)$ остается открытым для $n=1, 2, \ldots$, так как в настоящее время нет строгой теоремы обоснования метода усреднения для бесконечных стандартных систем дифференциальных уравнений.

Отметим, что другие задачи колебаний упругих и вязко-упругих систем методом усреднения изучены в [43, 142]. Некоторые из них сводятся к исследованию интегральных и интегродифференциальных уравнений, для которых асимптотические методы, основанные на идее усреднения, развиты А. А. Ильюшиным, А. Н. Филатовым, Б. И. Моргуновым и другими учеными [142—146].

§ 4.7. Энергетический метод построения амплитудно-фазовых уравнений

В гл. II мы многократно выводили дифференциальные уравнения для амплитуды a и фазы ψ (амплитудно-фазовые уравнения) колебательных систем при использовании метода усреднения. Здесь изложим другой алгоритм построения амплитудно-фазовых уравнений первого приближения (вида (2.144)), не требующий предварительного написания возмущенных уравнений вида (2.133). Этот алгоритм основан на применении так называемого энергетического метода [147], хорошо известного в уравнениях математической физики. Для построения уравнений первого приближения достаточно знать некоторое выражение для работы возмущающих сил, а не сами силы, входящие в уравнения Лагранжа второго рода (2.128) или (2.133). В ряде случаев это существенно упрощает задачу. Чтобы не загромождать суть дела большим количеством громоздких формул и выкладок, вернемся к задаче (см. § 2.9) о построении приближенных решений системы (2.133), близких к одночастотным колебаниям с медленно изменяющейся частотой $\omega_1(\tau)$.

С этой целью рассмотрим выражение для виртуальной работы δW, которую совершают возмущающие силы Q_s $(s=1, \ldots, N)$

в режиме синусоидальных колебаний

$$x_k(t) = \varphi_k^{(1)}(t)\, a\cos\xi, \qquad \dot{x}_k(t) = -\varphi_k^{(1)}(t)\, a\omega_1(\tau)\sin\xi,$$
$$\xi = p\theta/q + \psi, \quad k = 1, \ldots, N,$$

на виртуальных перемещениях [136, 147]

$$\delta x_k = \varphi_k^{(1)}(\tau)\cos\xi\delta a - \varphi_k^{(1)}(\tau)\, a\sin\xi\delta\psi, \tag{4.151}$$

соответствующих вариациям амплитуды и фазы первого нормального колебания с частотой $\omega_1(\tau)$.

По определению [136] виртуальная работа δW равна скалярному произведению вектора сил F, действующих на механическую систему, и вектора δx виртуальных перемещений:

$$\delta W = (F,\ \delta x). \tag{4.152}$$

Применительно к силам Q_{k0}, выраженным с помощью равенств (2.147), и к виртуальным перемещениям (151) получим

$$\delta W = \sum_{s=1}^{N} Q_{s0}\left[\varphi_s^{(1)}(\tau)\cos\xi\delta a - \varphi_s^{(1)}(\tau)\, a\sin\xi\delta\psi\right]. \tag{4.153}$$

Символ δ означает, что дифференциальная форма виртуальной работы δW не является в общем случае дифференциалом. Обозначим через $\overline{\delta W}$ величину средней виртуальной работы за полный цикл колебания на периоде 2π:

$$\overline{\delta W} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta W d\xi. \tag{4.154}$$

Построив двойное фурье-разложение для Q_{k0} $(k = 1, \ldots, N)$ и затем интегрируя выражение δW по полной фазе ξ с учетом (153) и (154), получим

$$\overline{\delta W} = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{isq\psi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N} Q_{r0}\varphi_r^{(1)} e^{-irq\psi}\,[\cos\xi\,\delta a - a\sin\xi\,\delta\psi]\, d\theta d\xi. \tag{4.155}$$

Индексы суммирования s связаны с индексами n и m разложения Q_{k0} в двойной ряд Фурье соотношениями $n = -sp$, $m = sq \pm 1$.

Для коэффициентов при вариациях δa и $\delta\psi$ в выражении (155) введем символические обозначения $\overline{\delta W/\delta a}$ и $\overline{\delta W/\delta\psi}$. Тогда систему уравнений (2.145) можно представить в виде

$$\left[\omega_1(\tau) - \frac{p\nu(\tau)}{q}\right]\frac{\partial A_1}{\partial\psi} - 2\omega_1(\tau)\, aB_1 = \frac{2}{m_1(\tau)}\frac{\overline{\delta W}}{\delta a},$$
$$\left[\omega_1(\tau) - \frac{p\nu(\tau)}{q}\right]a\frac{\partial B_1}{\partial\psi} + 2\omega_1(\tau)\, A_1 = -\frac{a}{m_1(\tau)}\frac{d\,[m_1(\tau)\,\omega_1(\tau)]}{d\tau} + \frac{2}{am_1(\tau)}\frac{\overline{\delta W}}{\delta\psi}. \tag{4.156}$$

Следовательно, для составления системы уравнений в частных производных, определяющих $A_1(\tau, a, \psi)$ и $B_1(\tau, a, \psi)$, нужно найти величину средней виртуальной работы, которую совершили бы за цикл колебания возмущающие силы в синусоидальном режиме на виртуальных перемещениях, соответствующих вариациям их амплитуды a и фазы ψ. После этого «частные производные» $\overline{\delta W}/\delta a$, $\overline{\delta W}/\delta\psi$ найденной средней виртуальной работы подставляются в уравнения (156).

Теперь легко дать энергетическую интерпретацию непосредственно амплитудно-фазовым уравнениям первого приближения (2.144) с учетом найденных в § 2.9 выражений (2.150) и (2.151) для $A_1(\tau, a, \psi)$ и $B_1(\tau, a, \psi)$. Для этого запишем среднюю виртуальную работу в виде

$$\overline{\delta W} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \overline{\delta W_s} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\overline{\delta W_s}}{\delta a}\,\delta a + \frac{\overline{\delta W_s}}{\delta\psi}\,\delta\psi \right], \tag{4.157}$$

где $\overline{\delta W_s}$ — величина средней виртуальной работы, которую совершила бы за цикл колебания s-я возмущающая сила в синусоидальном режиме (s-й член ее разложения в ряд Фурье) на виртуальных перемещениях, соответствующих вариациям амплитуды δa и фазы колебания $\delta\psi$.

С использованием (157) систему амплитудно-фазовых уравнений первого приближения (2.144) можно написать в виде

$$\begin{gathered}
\frac{da}{dt} = -\frac{\mu a}{2m_1(\tau)\,\omega_1(\tau)}\,\frac{d\,[m_1(\tau)\,\omega_1(\tau)]}{d\tau} + \\
+ \frac{2\mu}{m_1(\tau)} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[is\,(q\omega_1 - p\nu)\,\frac{\overline{\delta W_s}}{\delta a} + \frac{2\omega_1}{a}\,\frac{\overline{\delta W_s}}{\delta\psi} \right] \left[4\omega_1^2 - (q\omega_1 - p\nu)^2 s^2\right]^{-1}, \\
\frac{d\psi}{dt} = \omega_1 - \frac{p\nu}{q} + \frac{2\mu}{am_1} \times \\
\times \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[(q\omega_1 - p\nu)\,\frac{is}{a}\,\frac{\overline{\delta W_s}}{\delta\psi} - 2\omega_1\,\frac{\overline{\delta W_s}}{\delta a} \right] \left[4\omega_1^2 - (q\omega_1 - p\nu)^2 s^2\right]^{-1}.
\end{gathered} \tag{4.158}$$

Таким образом, можно сформулировать следующее правило: для составления амплитудно-фазовых уравнений первого приближения (158) необходимо найти величину средней виртуальной работы, которую совершили бы возмущающие силы за полный цикл колебания в синусоидальном режиме на виртуальных перемещениях, соответствующих вариациям амплитуды и фазы, разложить найденное выражение в ряд Фурье, после чего «частные производные» s-го члена подставить в уравнения (158).

Приведенное правило построения уравнений первого приближения значительно упрощается, если исследуемая колебательная система находится под воздействием только потенциальных возмущающих сил [136], так как в этом случае

$$\sum_{k=1}^{N} Q_k \delta x_k = \delta W = -\delta V,$$

где V — часть потенциальной энергии, возникающая в результате наличия возмущения; можно ее назвать «возмущенной» потенциальной энергией.

В этом случае для составления системы уравнений в частных производных, определяющей $A_1(\tau, a, \psi)$, $B_1(\tau, a, \psi)$, нужно найти вариацию возмущений, соответствующую вариациям амплитуды и фазы колебания, вычислить ее среднее значение (за цикл колебания) и подставить «частные производные» с обратным знаком в уравнения системы (156) вместо $\overline{\delta W/\delta a}$ и $\overline{\delta W/\delta \psi}$. Для составления амплитудно-фазовых уравнений первого приближения, кроме указанных операций, надо разложить «частные производные» в ряды Фурье и s-е члены этих рядов с обратными знаками подставить в уравнения (158) вместо $\overline{\delta W_s/\delta a}$ и $\overline{\delta W_s/\delta \psi}$.

Итак, энергетический метод позволяет построить приближенные решения без предварительного составления точных дифференциальных уравнений задачи. Для составления амплитудно-фазовых уравнений первого (второго) приближения используются непосредственно выражения для работы (или потенциальной энергии) и кинетической энергии. Последнее обстоятельство дает возможность распространить энергетический метод и на решение задач теории колебаний систем с распределенными параметрами [105], описываемых уравнениями в частных производных. Оказывается возможным [136] использовать для составления уравнений первого приближения (при исследовании одночастотных режимов колебаний) те же выражения работы и энергии, что и для систем с конечным числом степеней свободы. Как мы увидели, в энергетическом методе усреднение производится не в колебательных уравнениях, а в выражении для виртуальной работы, являющейся интегральной (суммарной) энергетической характеристикой возмущающих сил. Усредненная виртуальная работа (или энергия) используется затем для непосредственного построения амплитудно-фазовых уравнений первого (второго) приближения. Поэтому можно интерпретировать энергетический метод как некоторую модификацию метода усреднения, простота и эффективность которого очевидна при построении решений в первом приближении для уравнений в частных производных, описывающих нестационрные режимы колебаний систем с распределенными параметрами.

Энергетическим методом решен ряд задач теории колебаний, представляющих самостоятельный интерес. Среди них такие задачи [84]: изгибные колебания стержня под воздействием продольной пульсирующей силы, поперечные колебания стержня под воздействием подвижного груза и пульсирующей силы, изгибные колебания стержня двоякой жесткости в переходном режиме вращения, нестационарные режимы колебаний турбинной лопатки с учетом рассеяния энергии в материале, изгибно-крутильные колебания стержней при наличии внутреннего трения и другие.

Рассмотрим одну из таких задач.

§ 4.8. Поперечные колебания стержня под воздействием подвижного груза и пульсирующей силы

Составим с помощью энергетического метода амплитудно-фазовые уравнения первого приближения для нестационарного процесса — поперечных колебаний стрежней, находящегося под воздействием медленно передвигающегося груза и пульсирующей силы.

Обозначим через S величину площади поперечного сечения и предположим, что размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной стержня l. Предположим также, что по стержню движется некоторая малая (по сравнению с массой балки M) масса μM. Кроме того, пусть стержень находится под воздействием вертикальной периодической по θ силы $\mu F(\theta)$, точка приложения которой в любой момент времени совпадает с центром массы μM (рис. 14). Введем обозначения: ρ, E — плотность и модуль Юнга материала; I — момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба. При рассмотрении поперечных колебаний стержня, происходящих в вертикальной плоскости Oxy, пренебрегаем инерцией вращения поперечных сечений и перерезывающими силами.

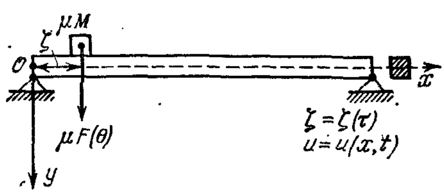

Рис. 14. Стержень, находящийся под воздействием подвижного груза и пульсирующей силы

Выражения для кинетической и потенциальной энергий исследуемой системы (стержня и груза) при этих допущениях имеют вид

$$T = \frac{\rho S}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \mu M \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\Bigg|_{x=\zeta} = T_0 + \mu T_1,$$

$$V = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx - \mu M g\,(u)\Bigg|_{x=\zeta} = V_0 + \mu V_1.$$

Уравнение собственных колебаний стержня, кинетическая и потенциальная энергии которого определяются выражениями

$$T_0 = \frac{\rho S}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx, \quad V_0 = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dx,$$

является уравнением невозмущенного движения. Оно легко выводится с помощью вариационного принципа Остроградского — Гамильтона [141]

$$\delta \int (T_0 - V_0) dt = 0$$

и имеет вид

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \qquad (4.159)$$

Краевые условия для свободно опирающихся или шарнирно закрепленных концов стержня записываются следующим образом:

$$u|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = u|_{x=l} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0. \qquad (4.160)$$

Будем искать решение уравнения (159) с помощью метода Фурье. Уравнение для собственных функций, определяющих формы нормальных (или главных) колебаний, имеет вид

$$d^4X/dx^4 - k^4X = 0, \quad k^4 = \rho\omega^2 S/(EI), \qquad (4.161)$$

а ω — частота главного колебания.

Записав общее решение уравнения (161) с помощью формулы

$$X(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx,$$

с учетом краевых условий (160), которые после применения метода Фурье записываются в виде

$$X|_{x=0} = \left.\frac{d^2X}{dx^2}\right|_{x=0} = X|_{x=l} = \left.\frac{d^2X}{dx^2}\right|_{x=l} = 0,$$

получаем частотное уравнение $\sin kl = 0$, корни которого выражаются формулой $k_n = n\pi/l$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Отсюда мы определяем формы нормальных (главных) колебаний невозмущенного движения

$$X_n(x) \equiv \varphi_n(x) = \sin(n\pi x/l), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и их собственные частоты

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

необходимые для построения асимптотических решений возмущенного движения при помощи энергетического метода.

Переходим к построению решения в первом приближении с учетом возмущающих сил, действующих на стержень.

Для определенности предположим, что

$$\mu F(\theta)=\mu F_0\sin\theta;$$

а $d\theta/dt=\nu(\mu t)>0$ — мгновенная частота возмущающей силы. При этом допустим, что на исследуемом отрезке времени $0\leqslant t\leqslant \leqslant T$ частота вертикальной силы $\nu(\mu t)$ принимает значение, равное ω_1, т. е. колебательная система проходит через главный резонанс. Это наиболее интересный случай.

С учетом «возмущающей» потенциальной энергии

$$\mu V_1=-\mu Mg(u)|_{x=\zeta},$$

где $\zeta=v\tau$ — текущая координата точки приложения возмущающей силы, v — скорость движения груза и пульсирующей силы вдоль стержня, и «возмущающей» кинетической энергии

$$\mu T_1=\mu M(\partial u/\partial t)^2|_{x=\zeta}$$

суммарную возмущающую силу (без учета сил внутреннего трения) можно представить как сумму приложенной извне пульсирующей силы и силы инерции, т. е.

$$\mu\Phi\left(\tau,\theta,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=\left[\mu F_0\sin\theta+\mu Mg-\mu M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]\Bigg|_{x=\zeta}. \qquad (4.162)$$

Как видно из выражения (162), за обобщенную координату следует принять прогиб балки u. Согласно выражению (2.143), первое приближение решения, соответствующего одночастотным колебаниям, близким к первому нормальному колебанию, для случая главного резонанса ($\omega_1\approx\nu(\tau)$) имеет вид

$$u^{(1)}=a\sin(\pi x/l)\cos(\theta+\psi), \qquad (4.163)$$

где a и ψ определяются из системы дифференциальных уравнений первого приближения вида (158).

Перейдем теперь к выводу уравнений (158), пользуясь энергетическим методом. Найдем выражение для возмущающей силы $\mu\Phi(\tau,\theta,\partial^2u/\partial t^2)$ в режиме синусоидальных колебаний

$$u^{(1)}(t,x)=a\varphi^{(1)}(x)\cos(\theta+\psi),\quad \partial u^{(1)}/\partial t=-a\omega_1\varphi^{(1)}(x)\sin(\theta+\psi),$$

$$\partial^2u^{(1)}/\partial t^2=-a\omega_1^2\varphi^{(1)}(x)\cos(\theta+\psi),$$

где $\varphi^{(1)}(x)=\sin(\pi x/l)$. В результате получим

$$\mu\Phi_0^{(1)}=\mu\left[F_0\sin\theta+Mg+a\omega_1^2M\sin(\pi\zeta/l)\cos(\theta+\psi)\right].$$

Далее составим выражение для виртуальной работы, соответствующей вариациям амплитуды и фазы первого нормального колебания:

$$\delta W = \mu\Phi_0^{(1)}\delta u^{(1)} = \mu\left[F_0 \sin\theta + Mg + a\omega_1^2 M \sin(\pi\zeta/l)\cos(\theta+\psi)\right]\times$$
$$\times[\sin(\pi\zeta/l)\cos(\theta+\psi)\,\delta a - a\sin(\pi\zeta/l)\sin(\theta+\psi)\,\delta\psi].$$

После этого найдем среднюю виртуальную работу $\overline{\delta W}$ и ее «частные производные», ненулевые выражения которых имеют вид

$$\frac{\overline{\delta W_1}}{\delta a} = \frac{iF_0}{4}\exp\{i\psi\}\sin\frac{\pi\zeta}{l},\quad \frac{\overline{\delta W_{-1}}}{\delta a} = -\frac{iF_0}{4}\exp\{-i\psi\}\sin\frac{\pi\zeta}{l}, \tag{4.164}$$
$$\frac{\overline{\delta W_1}}{\delta\psi} = -\frac{aF_0}{4}\exp\{i\psi\}\sin\frac{\pi\zeta}{l},\quad \frac{\overline{\delta W_{-1}}}{\delta\psi} = -\frac{aF_0'}{4}\exp\{-i\psi\}\sin\frac{\pi\zeta}{l},$$
$$\frac{\overline{\delta W_0}}{\delta a} = \frac{a\omega_1^2 M}{2}\sin^2\frac{\pi\zeta}{l},$$

а также величину

$$m_1 = \rho S\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx = \frac{\rho Sl}{2}. \tag{4.165}$$

Подставляя выражения (164) и (165) в уравнения (158), получаем амплитудно-фазовые уравнения первого приближения

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2\mu F_0}{\rho Sl(\omega_1+\nu)}\sin\frac{\pi\zeta}{l}\cos\psi,$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_1 - \nu - \frac{\mu\omega_1 M}{\rho Sl}\sin^2\frac{\pi\zeta}{l} + \frac{2\mu F_0}{\rho Sal(\omega_1+\nu)}\sin\frac{\pi\zeta}{l}\sin\psi, \tag{4.166}$$

где $\zeta=\zeta(\tau)$, $\nu=\nu(\tau)$.

На этом можно было бы закончить изложение энергетического метода применительно к задаче о поперечных колебаниях стержня под воздействием подвижного груза и пульсирующей силы, однако во многих работах встречается комплексная форма записи амплитудно-фазовых уравнений вида (166), поэтому ее целесообразно привести. Для этого введем комплекснозначную функцию $z=a\exp\{i\psi\}$, с помощью которой система уравнений (166) приводится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dz}{dt} = ip(\tau)z - \frac{2\mu F_0}{\rho Sl(\omega_1+\nu)}\sin\frac{\pi\zeta}{l}, \tag{4.167}$$

где

$$p(\tau) = \omega_1 - \nu - \frac{\mu\omega_1 M}{\rho Sl}\sin^2\frac{\pi\zeta}{l}.$$

Интегрируя уравнение (167) при условии $a(0)=0$ (тогда $z_0=0$), получаем

$$z(t) = -\frac{2\mu F_0}{\rho S l} \exp\left\{i\int_0^t p(\tau)\,d\tau\right\}\left[\int_0^t \frac{1}{\omega_1+\nu}\sin\frac{\pi\zeta}{l}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-i\int_0^t p(\tau)\,d\tau\right\}dt\right]. \quad (4.168)$$

Отделяя теперь действительную и мнимую части в последнем выражении с учетом замены $z=a\exp\{i\psi\}$, находим амплитуду колебаний

$$a(t,\mu) = \frac{2\mu F_0}{\rho S l}\left\{\left[\int_0^t \sin\frac{\mu\pi v t}{l}\,\frac{1}{\omega_1+\nu}\sin\left(\int_0^t p(\tau)\,d\tau\right)dt\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\int_0^t \sin\frac{\mu\pi v t}{l}\,\frac{1}{\omega_1+\nu}\cos\left(\int_0^t p(\tau)\,d\tau\right)dt\right]^2\right\}^{1/2}. \quad (4.169)$$

Приближенное решение (163) в частном случае стационарного режима колебаний (когда $\nu(\tau)=\text{const}$, $\zeta(\tau)=\text{const}$, $\mu M=0$), естественно, совпадает с известным точным решением.

В заключение рассмотрим конкретный числовой пример, иллюстрирующий в некоторой степени энергетический метод.

П р и м е р [136]. Определим амплитуды нестационарных колебаний при прохождении стержня (рис. 15) через главный резонанс. При помощи выражения (169) не представляет затруднений построить зависимость амплитуды основного тона колебаний от времени при нестационарном режиме. Эта зависимость при числовых значениях следующих параметров:

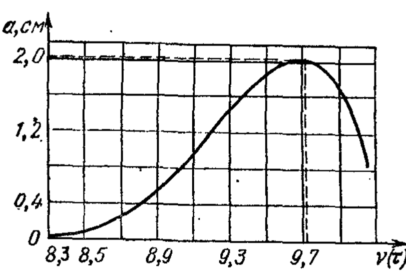

Рис. 15. Изображение нестационарных колебаний при прохождении стержня через главный резонанс

$$l=10\text{ м};\quad S=0{,}003\text{ м}^2;\quad \rho=7{,}8\cdot10^3\text{ кг/м}^3;$$

$$I=bh^3/12=90\text{ см}^4;\quad E=19{,}62\cdot10^{10}\text{ Н/м}^2;\quad \mu=0{,}1;$$

$$F_0=9{,}81\cdot10^3\text{ Н};\quad v=0{,}1\text{ м/с};\quad M=50\text{ кг};\quad \nu(\tau)=\nu_0+\alpha\tau,$$

$$\alpha=0{,}01\nu_0^2/\pi,\quad \nu_0=8{,}3\text{ с}^{-1};\quad \omega_1=8{,}57\text{ с}^{-1}$$

в предположении, что в начальный момент ($t=0$) возмущающая сила и масса находятся на левой опоре, приведена на рис. 15.

Нестационарность колебательного процесса в рассмотренной задаче проявляется в смещении максимума резонансной кривой амплитуды (на 13,5% величины собственной частоты ω_1) в сторону бо́льших частот возмущающей силы $\nu(\tau)$ и в ограниченности амплитуды в резонансной зоне даже при отсутствии сил внешнего и внутреннего сопротивлений.

§ 4.9. Построение решений многочастотных систем с помощью дискретного преобразования Фурье

Рассмотрим многочастотную вращательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений размерности $m+n$ вида (1.90):

$$dx/dt = \mu X(x,\ y),\quad dy/dt = \omega(x) + \mu Y(x,\ y) \tag{4.170}$$

с 2π-периодическими по y правыми частями и поставим задачу о построении ее приближенных решений с помощью ЭВМ. Один из наиболее эффективных алгоритмов решения этой задачи был разработан С. В. Мироновым и изложен в работе [148]. Здесь мы будем придерживаться в основном содержания этой работы.

Точное решение системы дифференциальных уравнений (170), согласно теории возмущений, представим в виде

$$x(t,\ \mu) = \bar{x}(t,\ \mu) + \delta x(t,\ \mu),\quad y(t,\ \mu) = \bar{y}(t,\ \mu) + \delta y(t,\ \mu), \tag{4.171}$$

где $\bar{x}(t,\ \mu)$, $\bar{y}(t,\ \mu)$ — некоторое приближенное решение системы (170), а $\delta x(t,\ \mu)$, $\delta y(t,\ \mu)$ — полное возмущение этих решений. Приближенное решение $\bar{x}(t,\ \mu)$, $\bar{y}(t,\ \mu)$ предполагается известной функцией времени t, и оно может быть найдено как точное решение системы дифференциальных уравнений, полученных из (170), например, методом усреднения. Возмущения δx, δy являются неизвестными функциями времени, и для их отыскания в работе [148] предложен алгоритм, синтезирующий возможности современных вычислительных средств и эффективных методов вычислений с априори заданной точностью.

Основная идея алгоритма состоит в «машинной» аппроксимации таблицы численных значений возмущения, заданных в точках $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_s$ на исследуемом промежутке времени $[t_0,\ t_k]$.

Обозначим для краткости компоненты возмущенного решения $x(t,\ \mu)$, $y(t,\ \mu)$ через $\alpha(t,\ \mu)$, компоненты приближенного решения $\bar{x}(t,\ \mu)$, $\bar{y}(t,\ \mu)$ через $\bar{\alpha}(t,\ \mu)$ и возмущения $\delta x(t,\ \mu)$, $\delta y(t,\ \mu)$ через $\delta\alpha(t,\ \mu)$. Учитывая (171), запишем $\delta\alpha(t,\ \mu)$ в виде

$$\delta\alpha(t,\ \mu) = \alpha(t,\ \mu) - \bar{\alpha}(t,\ \mu). \tag{4.172}$$

Функция $\bar{\alpha}(t,\ \mu)$ предполагается известной. Что касается искомой функции $\alpha(t,\ \mu)$, то хотя ее аналитическая форма нам неизвестна, однако можно определить численное значение $\alpha(t_*)$ для любого момента t_*, если численно проинтегрировать дифференциальные уравнения (170). Таким образом, по формуле (172) можно определить численное возмущение $\delta\alpha(t_*, \mu)$ для любого фиксированного момента t_*, принадлежащего исследуемому отрезку $[t_0, t_к]$. Разобьем отрезок $[t_0, t_к]$ на $2N$ равных частей точками $t_n = t_0 + (n-1)\Delta t$ $(n = 1, 2, \ldots, 2N+1)$. Найдем значения возмущенного элемента $\alpha(t_n, \mu)$ в точках $t_0 = t_1 < t_2 < \ldots$ $\ldots < t_{2N+1} = t_к$, численно интегрируя уравнения (170) с заданной точностью ε (например, методами типа Рунге — Кутта). Для тех же моментов времени t_n вычислим значения компонент приближенного решения $\bar{\alpha}(t_n, \mu)$:

$$\bar{\alpha}_n = \bar{\alpha}(t_n, \mu), \qquad n = 1, \ldots, 2N+1. \tag{4.173}$$

Из теории возмущений известно [7, 126], что возмущения компонент решения в первом приближении содержат вековые и тригонометрические слагаемые. Поэтому $\delta\alpha(t, \mu)$ можно искать в виде суммы

$$\delta\alpha(t, \mu) = \delta\alpha_л(t, \mu) + \delta\alpha_{тр}(t, \mu), \tag{4.174}$$

где $\delta\alpha_л(t, \mu)$ — линейная составляющая возмущения, имеющая вид

$$\delta\alpha_л(t, \mu) = b_0 + b_1(t - t_0), \tag{4.175}$$

а $\delta\alpha_{тр}(t, \mu)$ — тригонометрическая (или условно-периодическая) составляющая.

Задачу об аппроксимации $\delta\alpha(t, \mu)$ можно сформулировать следующим образом.

Дана таблица численных значений $\delta\alpha_n = \delta\alpha(t_n, \mu)$ в равностоящих узлах $t_0 = t_1, \ldots, t_{2N+1} = t_к$ с шагом $\Delta t = (t_к - t_0)/(2N)$. Требуется аппроксимировать с заданной точностью ε на заданном промежутке $[t_0, t_к]$ возмущение $\delta\alpha(t, \mu)$ в виде суммы (174) так, чтобы величина

$$\delta^2 = \sum_{n=1}^{2N+1} (\delta\alpha_n - \delta\alpha_{л,n} - \delta\alpha_{тр,n})^2 \tag{4.176}$$

была минимальна и в каждой точке $t_1, \ldots, t_{2N+1}$ выполнялось неравенство

$$|\delta\alpha_n - \delta\alpha_{л,n} - \delta\alpha_{тр,n}| \leqslant \varepsilon, \qquad n = 1, 2, \ldots, 2N+1. \tag{4.177}$$

Рассмотрим в отдельности аппроксимации для $\delta\alpha_л$ и $\delta\alpha_{тр}$.

Пусть $\delta\alpha_n$ $(n = 1, 2, \ldots, 2N+1)$ — заданные табличные значения возмущения $\delta\alpha(t, \mu)$. Линейную составляющую будем искать в виде линейной функции (175) с неизвестными коэффициентами b_0, b_1.

Пользуясь методом наименьших квадратов [149], составим условные уравнения относительно b_0, b_1:

$$b_0 + b_1(t_n - t_0) = \delta\alpha_n, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2N+1. \tag{4.178}$$

Далее составим нормальную систему и, решив ее, получим следующие выражения для b_1 и b_0:

$$\begin{gathered} b_1 = \sum_{n=1}^{2N+1} (t_n - \hat{t})\,\delta\alpha_n \left[\sum_{n=1}^{2N+1} (t_n - \hat{t})^2\right]^{-1}, \\ b_0 = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=1}^{2N+1} \delta\alpha_n - b_1\hat{t}, \\ \hat{t} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=1}^{2N+1} (t_n - t_0). \end{gathered} \tag{4.179}$$

Соотношения (179) определяют линейную часть возмущения в среднем.

Формулы (174), (175), (179) позволяют найти численные значения условно-периодической составляющей:

$$\delta\alpha_{\text{тр},\,n} = \delta\alpha_n - b_0 - b_1(t_n - t_0). \tag{4.180}$$

Отсюда следует, что нет необходимости учитывать оценки погрешности аппроксимации линейной составляющей, так как они могут быть учтены при аппроксимации $\delta\alpha_{\text{тр}}(t,\ \mu)$.

Разложение функции в ряд Фурье на отрезке $[t_0,\ t_k]$ не позволяет выявить характерные свойства данной функции, так как отрезок $[t_0,\ t_k]$ выбран нами произвольно и никак не связан со свойствами функции. В частности, если функция $\delta\alpha_{\text{тр}}$ описывает колебательный процесс с несоизмерными частотами $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots$ $\ldots,\ \omega_p$, то ее разложение в ряд Фурье на отрезке $[t_0,\ t_k]$ содержит слагаемые с частотами $2\pi j/(t_k - t_0)$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2N+1)$, не совпадающими с частотами $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_p$. Поэтому потребуется сохранить довольно много членов в ряде Фурье для аппроксимации с заданной точностью такой функции. Вследствие этого нецелесообразно искать аппроксимирующий многочлен для функции $\delta\alpha_{\text{тр}}(t,\ \mu)$ в виде условно-периодической или, даже более узко, в форме полигармонической функции [150].

Задача об аппроксимации $\delta\alpha_{\text{тр}}$ формулируется следующим образом. Условно-периодическая составляющая возмущения компонент решения

$$\delta\alpha_{\text{тр}}(t,\ \mu) = \varphi(t,\ \mu) \tag{4.181}$$

определена на отрезке $[t_0,\ t_k]$ в виде таблицы численных значений

$$\varphi_n = \delta\alpha_{\text{тр}}(t_n,\ \mu) \tag{4.182}$$

на равномерной сетке

$$t_n = t_0 + (n-1)\Delta t, \quad \Delta t = (t_k - t_0)/(2N), \qquad n = 1,\ \ldots,\ 2N+1.$$

Требуется найти такой тригонометрический многочлен неизвестного порядка K

$$\delta\alpha_{\text{тр}} = \sum_{j=1}^{K} (c_j \cos\omega_j t + d_j \sin\omega_j t), \tag{4.183}$$

чтобы

$$\delta^2 = \sum_{n=1}^{2N+1} \left\{\varphi_n - \sum_{j=1}^{K} (c_j \cos\omega_j t_n + d_j \sin\omega_j t_n)\right\}^2 \tag{4.184}$$

было минимальным и для каждого t_n ($n = 1, 2, \ldots, 2N+1$) выполнялось неравенство

$$\left|\varphi_n - \sum_{j=1}^{K} (c_j \cos\omega_j t_n + d_j \sin\omega_j t_n)\right| \leqslant \varepsilon, \tag{4.185}$$

где ε — заданная точность аппроксимации полного возмущения.

Сформулированная задача сводится к определению неизвестных коэффициентов c_j, d_j, частот ω_j и их количества K. Эта задача получила название задачи о выявлении скрытых периодичностей [151], и она может иметь бесчисленное множество решений. Одно из ее решений было предложено К. Ланцошем; оно основано на применении к исследуемой функции интегрального преобразования Фурье, которое приводит к разложению данной функции на гармонические составляющие.

Введем для функции $\varphi(t, \mu)$ (181) новую переменную τ по формуле

$$\tau = (t - t_0)/\Delta t - N. \tag{4.186}$$

Очевидно, точкам $t_0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{2N+1} = t_k$ соответствуют значения τ, равные

$$-N,\ -N+1,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ N, \tag{4.187}$$

$$f(\tau) = \varphi(t(\tau)). \tag{4.188}$$

Равенство (188) позволяет обозначать табличные значения исследуемой функции $\varphi_n = \varphi(t_n)$ через $f_n = f(n)$. Тогда первоначальная задача эквивалентна задаче об аппроксимации таблично заданной функции $f(\tau)$ целочисленного аргумента τ тригонометрическим многочленом пока неизвестного порядка K

$$\tilde{f}(\tau) = \sum_{j=1}^{K} (a_j \cos\theta_j\tau + b_j \sin\theta_j\tau) \tag{4.189}$$

таким, чтобы

$$\delta^2 = \sum_{s=-N}^{N} \left\{f_s - \sum_{j=1}^{K} (a_j \cos\theta_j s + b_j \sin\theta_j s)\right\}^2 \tag{4.190}$$

было минимально и выполнялись условия

$$\left| f_s - \sum_{j=1}^{K} (a_j \cos\theta_j s + b_j \sin\theta_j s) \right| \leqslant \varepsilon, \quad s = 0, \pm 1, \ldots, \pm N. \qquad (4.191)$$

Параметры a_j, b_j, θ_j многочлена (189) связаны с параметрами c_j, d_j, ω_j искомого многочлена (183) соотношениями

$$c_j = a_j \cos\theta_j s^* + b_j \sin\theta_j s^*, \quad d_j = -a_j \sin\theta_j s^* + b_j \cos\theta_j s^*,$$
$$\omega_j = \frac{\theta_j}{\Delta t}, \quad s^* = \frac{t_k + t_0}{t_k - t_0} N, \quad \Delta t = \frac{t_k - t_0}{2N}. \qquad (4.192)$$

Прежде всего определим частоты θ_j и их число K. Для этой цели воспользуемся методом К. Ланцоша [151], основанным на преобразовании Фурье таблично заданной функции.

Подчеркнем, что искомые частоты θ_j должны удовлетворять условию

$$0 < \theta_j < \pi, \qquad j = 1, 2, \ldots, K, \qquad (4.193)$$

так как на большем интервале задания θ_j две частоты $\pi + \gamma$ и $\pi - \gamma$ будут неразличимы.

Положим, согласно [151],

$$\theta_j = \pi q/N, \qquad 0 < q < N. \qquad (4.194)$$

Из соотношений (193), (194) следует, что

$$\Delta t = \pi/\omega_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, K,$$

т. е. шаг таблицы Δt исследуемой функции $\varphi(t)$ (181) не должен превышать половины минимального из периодов $T_j = 2\pi/\omega_j$ $(j = 1, 2, \ldots, K)$. С другой стороны, частоты ω_j исследуемой функции $\varphi(t)$ должны быть ограничены интервалом

$$0 < \omega_j < \pi/\Delta t. \qquad (4.195)$$

Следуя К. Ланцошу, выделим удвоенные четную и нечетную части функции $f(\tau)$ (188):

$$\psi(\tau) = f(\tau) + f(-\tau), \qquad \eta(\tau) = f(\tau) - f(-\tau),$$

или

$$\psi_s = f_s + f_{-s}, \qquad \eta_s = f_s - f_{-s}. \qquad (4.196)$$

Тогда в разложении (189) можно отделить синусы от косинусов:

$$\psi(\tau) = 2 \sum_{j=1}^{K} a_j \cos\theta_j \tau, \quad \eta(\tau) = 2 \sum_{j=1}^{K} b_j \sin\theta_j \tau. \qquad (4.197)$$

Применим к функциям $\psi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ косинус- и синус-преобразование соответственно, которые для таблично заданных функций имеют следующий вид [148]:

$$U(q) = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{s=1}^{N-1} \psi_s \cos\frac{\pi qs}{N} + \frac{1}{2}\psi_N \cos \pi q, \qquad (4.198)$$

$$V(q) = \sum_{s=1}^{N} \eta_s \sin\frac{\pi qs}{N}. \qquad (4.199)$$

Функции $U(q)$, $V(q)$ заданы на интервале $0 < q < N$.

Функция $U(q)$ обнаруживает существование периодической составляющей $\cos(\theta_j\tau)$ тем, что она принимает экстремальное значение в точке

$$q_j = N\theta_j/\pi. \qquad (4.200)$$

Действительно, если $\psi(\tau)$ (197) имеет форму $\cos(\theta_j\tau)$, то соответствующая функция $U(q)$ (198) будет вида

$$U(q) = Z(N\theta_j/\pi + q) + Z(N\theta_j/\pi - q), \qquad (4.201)$$

где $Z(x) = \sin(\pi x/2)/\mathrm{ctg}(\pi x/(2N))$.

При малых x можно считать, что

$$Z(x) = N \sin \pi x/(2\pi x). \qquad (4.202)$$

Функция $\sin \pi x/(\pi x)$ быстро убывает при возрастании x, и наибольшего максимума она достигает в окрестности $x = 0$ (т. е. $\theta = \theta_j$). Отсюда следует, что если частоты θ_j, входящие в $\psi(\tau)$, не слишком близки, то функция $U(q)$ имеет резко выраженные экстремумы в точках $q = N\theta_j/\pi$ (т. е. при $\theta = \theta_j$). Это, по существу, и определяет эффект выделения гармонических компонент функции $f(\tau)$. Из формулы (202) видно, что высота экстремума функции (201) возрастает равномерно с N, но форма графика $U(q)$ в окрестности пика $q_j = N\theta_j/\pi$ не меняется вместе с N.

Множитель N в правой части равенства (200) показывает, что с возрастанием N экстремумы функции $U(q)$ раздвигаются, и в конечном итоге даже весьма близкие экстремумы могут быть отделены друг от друга. Иначе говоря, с ростом N усиливается фокусирующая способность косинус-преобразования. Аналогичным свойством обладает и синус-преобразование (199) функции $\eta(\tau)$ (197).

Итак, получим следующую численную схему определения частот θ_j.

Определим по формулам (198), (199) две числовые последовательности $U(q_s)$ и $V(q_s)$ для различных q_s $(0 \leqslant q_s \leqslant N)$. Из этих последовательностей находим экстремальные значения функций $U(q)$, $V(q)$ и соответствующие им точки $q_1', \ldots, q_{k_1}'$ и $q_1'', \ldots, q_{k_2}''$, которые должны совпадать, т. е.

$$q_s' = q_s'', \qquad s = 1, 2, \ldots, K. \qquad (4.203)$$

Выбор шага Δq при разбиении отрезка $0 \leqslant q \leqslant N$ определяется селективностью преобразования Фурье. Оценки, вытекающие из формулы (202), показывают, что для исключения интерферирующего влияния соседних частот достаточно шаг Δq разбиения отрезка $0 \leqslant q \leqslant N$ положить равным единице.

Хорошей проверкой по выбору шага Δq является условие (203), означающее, что положение экстремальных значений $U(q)$ и $V(q)$ должно быть одним и тем же.

По полученным числам $q'_s = q''_s = q_s$ $(s = 1, \ldots, K)$ находим теперь частоты θ_s из формулы (200).

После определения частот $\theta_1, \ldots, \theta_K$ можно найти неизвестные коэффициенты a_s, b_s $(s = 1, \ldots, K)$ многочлена $\bar{f}(\tau)$ (189). С этой целью, пользуясь соотношением (189), составим условные уравнения

$$\sum_{j=1}^{K} (a_j \cos\theta_j\tau_s + b_j \sin\theta_j\tau_s) = f(\tau_s), \quad \tau_s = 0, \pm 1, \ldots, \pm N, \tag{4.204}$$

и из них в соответствии с методом наименьших квадратов [149] получим систему нормальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{K} \alpha_{ij} a_j + \sum_{j=1}^{K} \beta_{ij} b_j = \gamma_i, \qquad i = 1, \ldots, K, \tag{4.205}$$

относительно неизвестных a_j, b_j $(j = 1, \ldots, K)$.

Поскольку аргумент τ задан в виде равноудаленных и симметричных относительно нуля значений (187), то можно показать, что система (205) распадается на две подсистемы

$$\sum_{j=1}^{K} p_{ij} a_j = g_i, \qquad i = 1, \ldots, K, \tag{4.206}$$

$$\sum_{j=1}^{K} t_{ij} b_j = h_i, \qquad i = 1, \ldots, K, \tag{4.207}$$

где

$$\begin{gathered} p_{ij} = \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{N} \cos\theta_i s \cos\theta_j s, \qquad t_{ij} = \sum_{s=1}^{N} \sin\theta_i s \sin\theta_j s, \\ g_i = \frac{f_0}{2} + \sum_{s=1}^{N} \frac{f_s + f_{-s}}{2} \cos\theta_i s, \qquad h_i = \sum_{s=1}^{N} \frac{f_s - f_{-s}}{2} \sin\theta_i s, \\ i, j = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{4.208}$$

Системы уравнений (206), (207) можно решать известными методами линейной алгебры [3], однако при большом числе уравнений целесообразно решать их итерационными методами, в частности методом Зейделя [152, 153], сходимость которого доказана в [154]. Для ускорения сходимости итерации разумно принять за нулевые приближения величины

$$a_j^{(0)} = U(q_j)/N, \quad b_j^{(0)} = V(q_j)/N, \qquad j = 1, 2, \ldots, K, \quad (4.209)$$

где $U(q_j)$, $V(q_j)$ — экстремальные значения функций (198), (199).

На этом заканчивается построение тригонометрического многочлена $\tilde{f}(\tau)$ (189), однако условие по точности (191) может быть не выполнено, поскольку не все частоты θ_j могут быть выделены. Это связано с ограниченной селективностью преобразования Фурье для дискретно заданных функций.

Если условие по точности (191) не выполнено, то поступаем следующим образом. Вычислим разности

$$f^{(1)}(\tau_s) = f(\tau_s) - \sum_{j=1}^{K} \{a_j \cos(\theta_j \tau_s) + b_j \sin(\theta_j \tau_s)\},$$
$$s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N. \quad (4.210)$$

Функция $f^{(1)}(\tau)$ содержит лишь те частоты, которые не вошли в $f(\tau)$ при первой аппроксимации. Применяя к $f^{(1)}(\tau)$ преобразование Фурье, получим многочлен

$$\tilde{f}^{(1)}(\tau) = \sum_{j=1}^{K_1} \left(a_j^{(1)} \cos\left(\theta_j^{(1)}\tau\right) + b_j^{(1)} \sin\left(\theta_j^{(1)}\tau\right)\right), \quad (4.211)$$

так что $f(\tau)$ аппроксимируется многочленом

$$f(\tau) = \sum_{j=1}^{K} (a_j \cos(\theta_j \tau) + b_j \sin(\theta_j \tau)) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{K_1} \left(a_j^{(1)} \cos\left(\theta_j^{(1)}\tau\right) + b_j^{(1)} \sin\left(\theta_j^{(1)}\tau\right)\right). \quad (4.212)$$

Если снова не выполняется условие по точности (191), то находим разности $f^{(2)}(\tau)$, $f^{(3)}(\tau)$, ..., $f^{(Q)}(\tau)$, которые аппроксимируем многочленами вида (211). Такой итерационный процесс выделения частот будет конечным, так как на каждом шаге итераций число подлежащих выделению частот θ_j уменьшается и фокусирующая способность преобразования Фурье возрастает.

Подставляя найденные величины θ_j, a_j, b_j ($j = 1, 2, \ldots, K$) в формулы (192), получим искомые частоты ω_j и коэффициенты c_i, d_j аппроксимирующего многочлена (183).

В частном случае, когда все частоты ω_j ($j = 1, 2, \ldots$) соизмеримы (т. е. $\omega_{j_1}/\omega_{j_2} = l_1/l_2$, где l_1, l_2 — целые числа), коэффициенты c_j, d_j искомого тригонометрического многочлена вычисляют, не решая системы (206), (207), а используя формулы

Пуассона

$$c_j = \frac{2}{2N+1} \sum_{s=1}^{2N+1} \delta\alpha_{\text{тр}}(t_s) \cos(\omega_j t_s),$$
$$d_j = \frac{2}{2N+1} \sum_{s=1}^{2N+1} \delta\alpha_{\text{тр}}(t_s) \sin(\omega_j t_s). \tag{4.213}$$

В конечном итоге для исходного условно-периодического возмущения $\delta\alpha_{\text{тр}}(t, \mu)$ (181) получим аппроксимирующий многочлен

$$\delta\alpha_{\text{тр}}(t, \mu) = \sum_{q=0}^{Q} \sum_{j=1}^{K_q} \left(c_j^{(q)} \cos\left(\omega_j^{(q)} t\right) + a_j^{(q)} \sin\left(\omega_j^{(q)} t\right)\right), \tag{4.214}$$

где K_q, c_j, d_j, ω_j ($j = 1, \ldots, K_q$) — параметры, полученные при q-й итерации преобразования Фурье.

Выражение (214) можно записать в компактной форме:

$$\delta\alpha_{\text{тр}}(t, \mu) = \sum_{j=1}^{M_Q} [C_j \cos(\omega_j t) + D_j \sin(\omega_j t)], \tag{4.215}$$

где $M_Q = K_1 + \ldots + K_Q$.

Таким образом, задача о численно-аналитической аппроксимации возмущения решена. Отметим основные достоинства рассмотренного метода аппроксимации полного возмущения компонент решения:

— вековые и условно-периодические возмущения определяются отдельно друг от друга;

— не используются сложные аналитические соотношения;

— условно-периодическое возмущение определяется в чисто тригонометрической форме;

— сам алгоритм построения полного возмущения, описанный здесь, является простым и гибким при вычислениях на современных ЭВМ.

Изложенная методика построения возмущений была применена к конкретным задачам небесной механики, в частности для определения возмущений элементов орбит астероидов Юнона, Веста, Астрея, Геба, Ирида и Лютеция. В качестве приближенного решения дифференциальных уравнений, описывающих движение этих астероидов, было взято точное решение усредненного по схеме Фату варианта ограниченной круговой задачи трех тел [8, 124].

Анализ численных результатов показал, что на промежутке времени 500 лет вековые возмущения большой полуоси δa, эксцентриситета δe и наклона δi практически отсутствуют, в то время как угловые элементы ω, Ω и M претерпели значительные изменения из-за наличия вековых возмущений. Они имеют порядок:

$$|\delta\omega_{\text{век}}| \leqslant 51\,050'', \quad |\delta\Omega_{\text{век}}| \leqslant 1\,060'', \quad |\delta M_{\text{век}}| \leqslant 7\,000''.$$

Что касается условно-периодических (тригонометрических) возмущений, их максимальные амплитуды составляют: для большой полуоси 0,000520 а. е., для эксцентриситета 0,001500, для угловых элементов ω, Ω, i и M соответственно 1450, 175, 100 и 1650″. Минимальное значение частот колебаний условно-периодических возмущений равно 0,0158 год$^{-1}$, а максимальное 9,42 год$^{-1}$.

§ 4.10. Алгоритм построения преобразования Крылова — Боголюбова с помощью ЭВМ

Выше неоднократно подчеркивалось, что при построении асимптотических решений дифференциальных уравнений ключевым элементом является само преобразование Крылова — Боголюбова. При построении в явном виде этого преобразования представляется весьма обещающим использование ЭВМ. Мы здесь рассмотрим один частный класс многочастотных дифференциальных уравнений с постоянными вещественными рационально несоизмеримыми частотами. Некоторые алгоритмы для более сложных математических моделей можно найти в [17, 155—157].

Пусть дана система уравнений

$$dx/dt = \mu X(x,\ y), \quad dy/dt = \omega_0 + \mu Y(x,\ y), \tag{4.216}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_m)$ — вектор медленных и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — вектор быстрых переменных, $\omega_0 = (\omega_{10}, \ldots, \omega_{n0})$ — постоянный вектор с вещественными рационально несоизмеримыми компонентами и X, Y — вектор-функции соответствующей размерности. Пусть $X(x,\ y)$, $Y(x,\ y)$ представлены n-кратными полиномами Фурье некоторого порядка N_0 относительно y:

$$\begin{aligned} X(x,\ y) &= \sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N_0} X_k(x) \exp\{i(k,\ y)\}, \\ Y(x,\ y) &= \sum_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N_0} Y_k(x) \exp\{i(k,\ y)\}, \end{aligned} \tag{4.217}$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — целочисленный вектор, $(k,\ y) = k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots + k_ny_n$, $\|k\| = |k_1| + \ldots + |k_n|$, $k_s = 0, \pm 1, \ldots, \pm N_0$, $s = 1, \ldots, n$, и $X_k(x)$, $Y_k(x)$ — алгебраические полиномы степени s_0 относительно компонент вектора x. Следует также предположить, что алгебраическое уравнение

$$X_0(x) = 0 \tag{4.218}$$

обладает вещественным решением $x = x^{(0)}$, т. е. имеется такой постоянный вектор $x^{(0)}$, при котором среднее значение функции $X(x,\ y)$ равно нулю.

Преобразование Крылова — Боголюбова будем искать в виде

$$x = \bar{x} + \mu u(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = \bar{y} + \mu v(\bar{x}, \bar{y}), \tag{4.219}$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ — новые переменные, а функции $u(\bar{x}, \bar{y})$, $v(\bar{x}, \bar{y})$ — результат почленного интегрирования чисто тригонометрических частей полиномов (217), в которых x, y заменены на $\bar{x}$, $\bar{y}$ соответственно, т. е.

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{0<\|k\|<N_0} \frac{X_k(\bar{x})}{i(k, \omega_0)} \exp\{i(k, \bar{y})\}, \\ v(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{0<\|k\|<N_0} \frac{Y_k(\bar{x})}{i(k, \omega_0)} \exp\{i(k, \bar{y})\}. \end{aligned} \tag{4.220}$$

Формулы (220) суть частный случай формул (3.55), (3.58). Кроме того, положим

$$\bar{x} = x^{(0)} + \xi. \tag{4.221}$$

Ввиду предположения о рациональной несоизмеримости компонент вектора ω_0 все величины (k, ω_0) отличны от нуля, но, вообще говоря, они могут быть при некоторых k достаточно малыми и представлять собой так называемые малые знаменатели.

При выводе уравнений относительно ξ, $\bar{y}$ (приводим этот вывод с целью детализации структуры этих уравнений) получим сначала соотношения

$$\begin{aligned} ((E + \mu\partial u/\partial\bar{x}), d\xi/dt) + \mu(\partial u/\partial\bar{y}, d\bar{y}/dt) &= \\ = \mu X(\bar{x} + \mu u, \bar{y} + \mu v), \\ \mu(\partial v/\partial\bar{x}, d\xi/dt) + ((E + \mu\partial v/\partial\bar{y}), d\bar{y}/dt) &= \omega_0 + \mu Y(\bar{x} + \mu u, \bar{y} + \mu v), \end{aligned} \tag{4.222}$$

где E — единичная матрица. Функции $u(\bar{x}, \bar{y})$, $v(\bar{x}, \bar{y})$ удовлетворяют в соответствии с (220) соотношениям

$$(\partial u/\partial\bar{y}, \omega_0) = X(\bar{x}, \bar{y}) - X_0(\bar{x}), \quad (\partial v/\partial\bar{y}, \omega_0) = Y(\bar{x}, \bar{y}) - Y_0(\bar{x}). \tag{4.223}$$

Используя эти соотношения, можем переписать (222) в виде

$$\begin{aligned} ((E + \mu\,\partial u/\partial\bar{x}), d\xi/dt) + \mu(\partial u/\partial\bar{y}, (d\bar{y}/dt - \omega_0)) &= \\ = \mu[X(\bar{x} + \mu u, \bar{y} + \mu v) + X_0(\bar{x}) - X(\bar{x}, \bar{y})], \\ \mu(\partial v/\partial\bar{x}, d\xi/dt) + ((E + \mu\,\partial v/\partial\bar{y}), (d\bar{y}/dt - \omega_0)) &= \\ = \mu[Y(\bar{x} + \mu u, \bar{y} + \mu v) + Y_0(\bar{x}) - Y(\bar{x}, \bar{y})], \end{aligned} \tag{4.224}$$

где в правых частях следует всюду положить $\bar{x} = x^{(0)} + \xi$. Так как $X_0(x^{(0)}) = 0$, то правая часть первого из соотношений (224) представится в виде

$$\mu[(\bar{H}, \xi) + P(\xi, \bar{y}, \mu)], \tag{4.225}$$

где $\bar{H} = \partial X_0(x^{(0)})/\partial x$ — постоянная матрица, а функция $P(\xi, \bar{y}, \mu)$ имеет по норме второй порядок малости относительно $\|\xi\|$ и первый относительно μ, т. е.

$$\|P(\xi, \bar{y}, \mu)\| \sim \|\xi\|^2 + \mu. \tag{4.226}$$

Правая часть второго из соотношений (224) запишется в виде

$$\mu[Y_0(x^{(0)}) + Q(\xi, \bar{y}, \mu)], \tag{4.227}$$

где функция Q имеет по норме первый порядок малости относительно $\|\xi\|$ и μ, т. е.

$$\|Q(\xi, \bar{y}, \mu)\| \sim \|\xi\| + \mu. \tag{4.228}$$

В соответствии с выражениями для $X(x, y)$, $Y(x, y)$ и $u(\bar{x}, \bar{y})$, $v(\bar{x}, \bar{y})$ функции P, Q представимы по $\bar{y}$ рядами Фурье вида (217), коэффициенты которых являются степенными рядами относительно компонент вектора ξ. Аппроксимируем P, Q полиномами Фурье по $\bar{y}$ некоторого порядка с коэффициентами — алгебраическими полиномами некоторой степени относительно компонент вектора ξ. Такими же полиномами Фурье, но с матричными коэффициентами, представимы матрицы Якоби:

$$\begin{aligned} P_1 &= \partial u(\bar{x}, \bar{y})/\partial \bar{x}, & P_2 &= \partial u(\bar{x}, \bar{y})/\partial \bar{y}, \\ Q_1 &= \partial v(\bar{x}, \bar{y})/\partial \bar{x}, & Q_2 &= \partial v(\bar{x}, \bar{y})/\partial \bar{y}. \end{aligned} \tag{4.229}$$

Рассматривая далее (224) как линейные алгебраические уравнения относительно $d\xi/dt$, $d\bar{y}/dt$, найдем

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= \mu(\bar{H}, \xi) + \mu\bar{F}(\xi, \bar{y}, \mu), \\ d\bar{y}/dt &= \omega_0 + \mu Y_0(x^{(0)}) + \mu\bar{\Phi}(\xi, \bar{y}, \mu), \end{aligned} \tag{4.230}$$

где $\bar{F}$, $\bar{\Phi}$ представлены полиномами Фурье по $\bar{y}$ порядка N с коэффициентами — алгебраическими полиномами степени s относительно компонент вектора ξ. При этом, согласно (225) — (228),

$$\mu\|\bar{F}\| \sim \mu\|\xi\|^2 + \mu^2, \quad \mu\|\bar{\Phi}\| \sim \mu\|\xi\| + \mu^2. \tag{4.231}$$

Уравнения (230) (точнее говоря, система, состоящая из двух подсистем) представляют собой искомые уравнения относительно новых переменных ξ, $\bar{y}$. Существенно, что в первом из уравнений (230) линейные относительно ξ члены, которые присутствуют в функции $\mu\bar{F}(\xi, \bar{y}, \mu)$, имеют коэффициенты порядка малости не ниже μ^2. Поэтому линейная относительно ξ часть в этом уравнении имеет с точностью до членов порядка μ постоянные коэффициенты, соответствующие матрице $\mu\bar{H}$. Кроме того, в правой части второго из уравнений (230) переменные члены, зависящие от $\bar{y}$ и не зависящие от ξ (присутствующие в функции $\mu\bar{\Phi}(\xi, \bar{y}, \mu)$), имеют порядок μ^2 или выше. Именно получение подобной структуры правых частей уравнений относительно новых переменных является целью преобразования Крылова — Боголюбова. Если бы мы применили к системе (230) такое преобразование повторно, т. е. ввели бы вместо ξ, $\bar{y}$ по аналогичным формулам переменные ξ_1, $\bar{y}_1$, то пришли бы к уравнениям относительно ξ_1, $\bar{y}_1$ аналогичного вида, в которых: 1) линейная относительно ξ_1 часть в первом уравнении имеет постоянные коэффициенты с точностью до членов порядка μ^2; 2) в правой части второго уравнения все члены, зависящие от $\bar{y}_1$ и не зависящие от ξ_1, имеют порядок μ^3 или выше.

Сложность операций по переходу от системы (216) к системе (230) заключается с вычислительной точки зрения в том, что во всех находимых полиномах Фурье сохраняется аналитическая зависимость от ξ. Здесь имеем дело не с полиномами Фурье, коэффициенты которых суть числа, а с полиномами Фурье вида

$$\sum S_k(\xi)\exp\{i(k, \bar{y})\}, \tag{4.232}$$

где коэффициенты $S_k(\xi)$ выражаются алгебраическими полиномами некоторой степени относительно компонент вектора ξ:

$$S_k(\xi) = \sum_{0\leqslant\|r\|\leqslant s} h_r^{(k)}\xi_1^{r_1}\ldots\xi_m^{r_m}. \tag{4.233}$$

Коэффициенты $h_r^{(k)}$ являются известными числами, и именно с ними производятся непосредственно операции на ЭВМ, при этом следует выделять их вещественные и мнимые части.

В целом полная схема алгоритма для преобразования Крылова — Боголюбова при фиксированном численном значении μ следующая.

Прежде всего запишем исходные уравнения (216), не указывая на зависимость правых частей от μ, так как численное значение μ фиксировано. Сохранив прежние обозначения, запишем их в виде

$$dx/dt = X(x, y), \quad dy/dt = \omega_0 + Y(\bar{x}, \bar{y}), \tag{4.234}$$

где функции X, Y выражены полиномами Фурье вида (217). Формулы, определяющие замену переменных, запишутся в виде

$$x = \bar{x} + u(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = \bar{y} + v(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x} = x^{(0)} + \xi, \tag{4.235}$$

где u, v выражены полиномами (220).

Фиксируем порядок N всех строящихся полиномов Фурье и степень s алгебраических полиномов для их коэффициентов, а также допустимую погрешность Δ коэффициентов. Далее:

1. Находим численное решение (вещественное) $x = x^{(0)}$ уравнения (218) и, полагая $\bar{x} = x^{(0)} + \xi$, определяем на основании (220) полиномы Фурье вида (232) для функций $u(x^{(0)} + \xi, \bar{y})$, $v(x^{(0)} + \xi, \bar{y})$. Обозначим эти полиномы через $\tilde{u}(\xi, \bar{y})$, $\tilde{v}(\xi, \bar{y})$.

2. Выполним подстановку $x = x^{(0)} + \xi + \tilde{u}(\xi, \bar{y})$, $y = \bar{y} + \tilde{v}(\xi, \bar{y})$;

в полиномах (217) для $X(x, y)$, $Y(x, y)$

$$X\left(x^{(0)}+\xi+\tilde{u}, \bar{y}+\tilde{v}\right)= \\ =\sum_{0 \leqslant\|k\| \leqslant N_0} X_k\left(x^{(0)}+\xi+\tilde{u}\right) \exp \{i(k, \bar{y})\} \exp \{i(k, \tilde{v})\} \qquad (4.236)$$

и аналогичное выражение для $Y(x^{(0)}+\xi+\tilde{u}, \bar{y}+\tilde{v})$. Коэффициенты $X_k(x)$ являются алгебраическими полиномами относительно вектора x. В результате последовательных арифметических операций над формулами вида (232) мы выразим функции $X_k(x^{(0)}+\xi+\tilde{u})$ полиномами такой же структуры, но порядка N и с коэффициентами — алгебраическими полиномами степени s относительно компонент вектора ξ. Находим далее (или одновременно) такие же полиномы Фурье для экспонент $\exp\{i(k, \tilde{v})\}$ при различных k, используя приближенное выражение

$$\exp \{i(k, \tilde{v})\} \approx 1+\sum_{j=1}^{\sigma} \frac{[i(k, \tilde{v})]^j}{j!} \qquad (4.237)$$

и выбирая σ так, чтобы достичь заданной точности всех коэффициентов. После дальнейших операций перемножения и сложения найденных полиномов приходим к полиному Фурье вида (232) для функции (236) и затем для функции (225). Аналогичным образом приходим к полиному Фурье вида (232) для функции $Y(x^{(0)}+\xi+\tilde{u}, \bar{y}+\tilde{v})$ и затем для функции (227).

3. Находим полиномы Фурье вида (232) для коэффициентов при $d\xi/dt$, $d\bar{y}/dt$ в левых частях (234) по программе дифференцирования полиномов.

4. Рассматриваем (224) как систему линейных алгебраических уравнений относительно $d\xi/dt$, $d\bar{y}/dt$, находим обратную матрицу коэффициентов этой системы и затем приходим к искомым уравнениям (230). При этом все операции, включая нахождение указанной обратной матрицы, сводятся к арифметическим операциям с полиномами вида (232). Запишем окончательно систему (230) в виде

$$d\xi/dt=(\bar{H}, \xi)+F(\xi, \bar{y}), \quad d\bar{y}/dt=\omega+\Phi(\xi, \bar{y}), \qquad (4.238)$$

где $\omega=\omega_0+\mu Y_0(x^{(0)})$, а функции F, Φ выражены полиномами Фурье вида (232), т. е.

$$\begin{aligned} F(\xi, \bar{y}) &= \sum_{0 \leqslant\|k\| \leqslant N} F_k(\xi) \exp \{i(k, \bar{y})\}, \\ \Phi(\xi, \bar{y}) &= \sum_{0 \leqslant\|k\| \leqslant N} \Phi_k(\xi) \exp \{i(k, \bar{y})\}, \end{aligned} \qquad (4.239)$$

где $F_k(\xi)$, $\Phi_k(\xi)$ — алгебраические полиномы степени s относительно компонент вектора ξ.

Замечание. Изложенный алгоритм может быть эффективно применен и в том случае, когда компоненты вектора частот ω системы (216) рационально соизмеримы с целочисленным вектором k^*. В этом случае следует воспользоваться заменой (53): $D=(k^*, y)$ — для исключения одной из быстрых угловых переменных, например переменной y_1, с помощью формулы (54) из системы (216). В результате этого вместо системы (216) получаем такую же систему, но в ней число медленных переменных уже будет равно $m+1$ $(x_1, x_2, \ldots, x_m, D)$, а число быстрых переменных станет равным $n-1$ $(y_2, \ldots, y_n)$. После замены y_1 на D получаем снова систему вида (234) с той лишь разницей, что частоты «перестроенных» рядов Фурье уже не будут рационально соизмеримыми.

ГЛАВА V

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Канонические (гамильтоновы) системы занимают особое место в математике, механике и физике, и, хотя они могут рассматриваться как частный случай систем с медленными и быстрыми переменными (см. гл. I), они заслуживают того, чтобы используемые для них асимптотические методы изложить отдельно. Это оказывается весьма полезным, так как, с одной стороны, многие хорошо известные задачи нелинейной механики, физики (задача двух, трех и большего числа тел, вращение тела вокруг неподвижной точки, динамика частиц в электромагнитных полях и др.) описываются гамильтоновыми системами, а с другой — для таких систем математиками были разработаны специальные, достаточно эффективные методы исследования [4, 8, 9, 12, 91, 158].

Гамильтоновы системы являются наиболее подходящей моделью для описания движений в динамических системах с потенциальными полями, когда существует так называемая характеристическая функция, зависящая от обобщенных координат и скоростей (импульсов) [159], которая «порождает» дифференциальные уравнения движения; поэтому можно сказать, что она исчерпывающим образом описывает движения в динамических системах. Асимптотическое интегрирование канонических систем так или иначе связано с нахождением периодических или условно-периодических решений, с изучением окрестности таких решений и с проблемой устойчивости частных решений гамильтоновых систем [12, 91, 160].

Широкое распространение в теории канонических систем получил метод нормализации гамильтониана в окрестности равновесного решения (положения равновесия), который, в сущности, является специальным методом замены переменных. Впервые вопросы нормализации гамильтоновых систем были подробно исследованы Биркгофом [161, 162]. К первоначальной канонической системе применяется такая каноническая замена переменных, чтобы в новых обобщенных координатах и импульсах функция Гамильтона имела наиболее простой вид, который и принято называть нормальной формой гамильтониана возмущенного движения.

§ 5.1. Канонические уравнения, канонические преобразования. Их свойства

Система уравнений $2n$-го порядка вида

$$dx/dt = -\partial H/\partial y, \quad dy/dt = \partial H/\partial x, \tag{5.1}$$

где $H(x, y, t)$ — дифференцируемая в некоторой области $G_{2n+1} = \{(x, y, t)\colon x \in P_n,\ y \in Q_n,\ t \in (-\infty, \infty)\}$ функция, называется канонической (гамильтоновой) неавтономной системой [4, 163]. Скалярная функция $H(x, y, t)$ называется функцией Гамильтона или гамильтонианом. Если H не зависит от t, то система (1) называется канонической (гамильтоновой) автономной системой. Из определения следует, что компонентами x являются обобщенные импульсы, компонентами y — обобщенные лагранжевы координаты [4, 163].

В механике говорят, что каноническая система уравнений (1) $2n$-го порядка описывает движения в динамической системе с n степенями свободы.

Как и в гл. I, можно поставить вопрос о преобразовании системы (1) к некоторой системе сравнения, но в этом случае естественно требовать, чтобы последняя также имела канонический вид. Пусть система сравнения имеет вид

$$dx'/dt = -\partial H'/\partial y', \quad dy'/dt = \partial H'/\partial x'. \tag{5.2}$$

Невырожденное, дважды непрерывно дифференцируемое преобразование $(x, y) \to (x', y')$ называется *каноническим*, если оно преобразовывает каноническую систему (1) с произвольным, дважды дифференцируемым по x, y гамильтонианом H в каноническую систему (2).

Пусть преобразование $(x, y) \to (x', y')$ выражается формулами

$$\begin{gathered} x'_s = x'_s(t, x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n), \\ y'_s = y'_s(t, x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n), \\ s = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Тогда условие невырожденности преобразования (3) в некоторой области состоит в том, что якобиан

$$\Delta \equiv \frac{\partial(x'_1, \ldots, x'_n;\ y'_1, \ldots, y'_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n)} \neq 0 \tag{5.4}$$

в этой же области; якобиан Δ является определителем матрицы Якоби размерности $2n \times 2n$.

Отличие от нуля якобиана (4) гарантирует существование преобразования $(x', y') \to (x, y)$, обратного преобразованию (3):

$$\begin{gathered} x_s = x_s(t, x'_1, \ldots, x'_n;\ y'_1, \ldots, y'_n), \\ y_s = y_s(t, x'_1, \ldots, x'_n;\ y'_1, \ldots, y'_n), \\ s = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Множество канонических преобразований образует группу [163].

Известны необходимые и достаточные условия каноничности преобразования $(x, y) \to (x', y')$: полный дифференциал некоторой функции F должен равняться выражению

$$dF = \lambda(x, dy) - (x', dy') + W\,dt; \tag{5.6}$$

F называется *производящей функцией* канонического преобразования, параметр λ — его *валентностью.*

Здесь, как и всюду, (,) означает скалярное произведение векторов.

В дифференциальном равенстве (6) все функции (x, y, W) считаются выраженными через новые переменные x', y'.

Связь между гамильтонианами H, H' и функцией W выражается равенством

$$H' = \lambda H + W. \tag{5.7}$$

Если заменить функцию W в дифференциальном равенстве (6), то получим

$$dF = \lambda(x, dy) - (x', dy') + (H' - \lambda H)\,dt. \tag{5.8}$$

Канонические преобразования с $\lambda = 1$ называются *полностью каноническими* или *унивалентными* [163]. В дальнейшем только этот случай и будет нами рассматриваться. Для унивалентных преобразований имеем

$$dF = (x, dy) - (x', dy') + (H' - H)\,dt. \tag{5.9}$$

Условия (6), (8), (9) принято называть условиями Якоби — Пуанкаре.

Приведем еще одно очень важное определение.

Пусть дана пара дважды непрерывно дифференцируемых функций $f_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2$. Выражение

$$(f_1, f_2) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k} \frac{\partial f_2}{\partial y_k} - \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \right) \tag{5.10}$$

называется *скобкой Пуассона* [158, 163].

Можно доказать следующие свойства скобок Пуассона:

$$(f_1, f_1) = 0, \qquad (f_1, \mathrm{const}) = 0, \tag{5.11}$$

$$(f_1, f_2) = -(f_2, f_1), \tag{5.12}$$

$$(f_1 + f_2, f_3) = (f_1, f_3) + (f_2, f_3), \tag{5.13}$$

$$(f_1 f_2, f_3) = f_1(f_2, f_3) + f_2(f_1, f_3), \tag{5.14}$$

$$(f_1, (f_2, f_3)) + (f_2, (f_3, f_1)) + (f_3, (f_1, f_2)) \equiv 0. \tag{5.15}$$

Тождество (15) называется *тождеством Пуассона.*

С помощью скобок Пуассона можно составить так называемую матрицу Пуассона размерности $2n \times 2n$:

$$P(f) = ((f_i, f_j)), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{5.16}$$

Если преобразование (3) является каноническим, то справедливы равенства:

$$\begin{gathered}(x_i', x_k') = 0, \; (y_i', y_k') = 0, \\ (y_i', x_k') = \delta_{ik}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases} \\ i, k = 1, 2, \ldots, n, \end{gathered} \tag{5.17}$$

(δ_{ik} — символ Кронекера [162]).

Равенства (17) также выражают необходимые и достаточные условия каноничности преобразования (3). Скобки Пуассона инвариантны относительно унивалентных канонических преобразований.

Канонические системы имеют много замечательных свойств. Некоторые из них мы здесь приведем.

1. В случае автономных канонических систем уравнения (1) имеют известный первый интеграл

$$H(x, y) = h, \tag{5.18}$$

называемый интегралом энергии. Гамильтониан H представляет собой полную энергию (кинетическая энергия T плюс потенциальная энергия U) динамической системы.

2. В неавтономном случае гамильтониан H выражается с помощью T и U в виде равенства

$$H(x, y, t) = (x, dy/dt) - T - U. \tag{5.19}$$

3. Введем в рассмотрение матрицу A размерности $2n \times 2n$

$$A = \begin{pmatrix} 0_n & -E_n \\ E_n & 0_n \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

где E_n и 0_n — единичная и нулевая матрицы размерности $n \times n$. Очевидно, что $\det A = 1$. Кроме того, введем $2n$-мерные вектор-строки

$$\begin{gathered} z = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ z' = (x_1', x_2', \ldots, x_n', y_1', y_2', \ldots, y_n'), \\ \partial H/\partial z = (\partial H/\partial x_1, \ldots, \partial H/\partial x_n, \partial H/\partial y_1, \ldots, \partial H/\partial y_n), \\ \partial H'/\partial z' = (\partial H'/\partial x_1', \ldots, \partial H'/\partial x_n', \partial H'/\partial y_1', \ldots, \partial H'/\partial y_n'). \end{gathered} \tag{5.21}$$

Тогда гамильтонову систему (1) можно написать в виде

$$dz^T/dt = A(\partial H/\partial z)^T \tag{5.22}$$

(символ T означает операцию транспонирования).

Наряду со скобками Пуассона (10) введем *скобки Лагранжа*

$$[z_i', z_j'] = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial x_k}{\partial z_j'} \frac{\partial y_k}{\partial z_i'} - \frac{\partial x_k}{\partial z_i'} \frac{\partial y_k}{\partial z_j'} \right) \tag{5.23}$$

и матрицу Лагранжа размерности $2n \times 2n$

$$L = \left([z_i', z_j'] \right), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{5.24}$$

Необходимое и достаточное условие каноничности преобразования (3) можно выразить также через скобки Лагранжа [163, 164], и оно имеет вид условий (17).

Матрицы Пуассона и Лагранжа обладают следующими свойствами:

$$P^T(z) = -P(z), \tag{5.25}$$

$$P(z) = (\partial z/\partial z') A (\partial z/\partial z')^T, \tag{5.26}$$

$$L^T(z') = -L(z'), \tag{5.27}$$

$$L(z') = (\partial z/\partial z')^T A (\partial z/\partial z'), \tag{5.28}$$

$$\det L(z') = (\det \partial z/\partial z')^2, \quad \det P(z') \det L(z') = 1, \tag{5.29}$$

$$L^{-1}(z') = -P(z'), \tag{5.30}$$

где L^{-1} — матрица, обратная матрице L.

Матрица $\partial z'/\partial z$ представляет собой матрицу Якоби размерности $2n \times 2n$, которая удовлетворяет равенству

$$(\partial z'/\partial z)^T A (\partial z'/\partial z) = A \tag{5.31}$$

и называется *симплектической*. Такие матрицы образуют группу [163].

Симплектичность матрицы Якоби $\partial z'/\partial z$ является также необходимым и достаточным условием каноничности преобразования (3) (следует учесть обозначения (21)).

4. Производная матрицы Лагранжа по времени удовлетворяет матричному равенству [164]

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial z'} \right)^T \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^T A + A \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial z'}, \tag{5.32}$$

где $\partial\varphi/\partial z$ — невырожденная матрица размерности $2n \times 2n$, а вектор-функция $\varphi(z, t)$ представляет собой правую часть системы

$$dz/dt = \varphi(z, t).$$

Предполагается, что функции, встречающиеся во всех приведенных соотношениях, дважды непрерывно дифференцируемы.

Из матричного равенства (32) вытекает очень важное свойство гамильтоновых систем, известное в литературе как теорема

Лиувилля [91, 158]. Поясним ее смысл. Пусть задана функция

$$\varphi(z,\ t)=A\,(\partial H/\partial z)^T. \qquad (5.33)$$

Легко проверить, что

$$A\,\partial\varphi/\partial z=-(\partial^2 H/\partial z^2)^T,\quad (\partial\varphi/\partial z)^T A=\partial^2 H/\partial z^2. \qquad (5.34)$$

В силу симметричности матрицы $\partial^2 H/\partial z^2$ получаем

$$(\partial\varphi/\partial z)^T A+A\,\partial\varphi/\partial z\equiv 0. \qquad (5.35)$$

Отсюда следует

$$dL/dt\equiv 0. \qquad (5.36)$$

Далее, учитывая соотношение (28), получим

$$(\partial z/\partial z')^T A\,(\partial z/\partial z')=\mathrm{const}. \qquad (5.37)$$

Левая часть равенства (37) часто называется [91, 158] *фазовым потоком* гамильтоновой системы. Таким образом, теорема Лиувилля утверждает, что поток гамильтоновой системы постоянен. Введение симплектической матрицы Якоби, а также матриц Пуассона и Лагранжа позволяет в удобной и компактной форме написать основные свойства канонических систем и преобразований.

§ 5.2. Уравнение Гамильтона — Якоби. Теорема Якоби

Уравнение в частных производных первого порядка относительно неизвестной функции $S(t;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ вида

$$\partial S/\partial t+H(t;\ \partial S/\partial y_1,\ \ldots,\ \partial S/\partial y_n;\ y_1,\ \ldots,\ y_n)=0 \qquad (5.38)$$

называется уравнением Гамильтона — Якоби [4, 7]. Правило составления его весьма просто: обобщенный импульс x_k в функции заменяется частной производной $\partial S/\partial y_k$ неизвестной функции $S(t;\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$, после чего записывается уравнение (38). Если гамильтониан H не зависит явно от t, то в этом случае уравнение Гамильтона — Якоби обычно записывается в виде

$$H(\partial V/\partial y_1,\ \partial V/\partial y_2,\ \ldots,\ \partial V/\partial y_n;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)=h, \qquad (5.39)$$

где h — произвольная постоянная, $V(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ — неизвестная функция. Переход от уравнения (38) к (39) осуществляется заменой

$$S=-ht+V. \qquad (5.40)$$

Введение уравнения Гамильтона — Якоби обусловлено тем, что мы хотим найти такое каноническое преобразование (3), чтобы в преобразованной канонической системе (2) гамильтониан был тождественно равен нулю: $H'\equiv 0$. Если это имеет место, то каноническая система (2) интегрируется непосредственно:

$$x_k' = \beta_k, \qquad y_k' = \alpha_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где α_k, β_k — произвольные постоянные. Далее формулы (5) дают непосредственно общее решение первоначальной канонической системы (1).

Полным интегралом уравнения в частных производных первого порядка называется такое его решение, в котором число неаддитивных произвольных постоянных равно числу обобщенных координат [7].

Из этого определения следует, что полный интеграл $S(t;\ y_1, \ldots, y_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ удовлетворяет условию

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial \alpha_k}\right) \neq 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Если в само уравнение в частных производных не входит функция S (как это имеет место в уравнении Гамильтона — Якоби), то число существенно различных произвольных постоянных на единицу меньше, т. е. равно $n-1$ [7]. Якоби доказал, что нахождение общего интеграла канонической системы (1) эквивалентно нахождению полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби (38). Это утверждение известно под названием

Теорема Гамильтона — Якоби [4, 7]. *Если задан полный интеграл $S(t;\ y_1, \ldots, y_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ уравнения Гамильтона — Якоби* (38), *то общий интеграл канонической системы* (1) *дается равенствами*

$$\partial S/\partial \alpha_k = \beta_k, \quad \partial S/\partial y_k = x_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.41}$$

Первые n уравнений определяют обобщенные координаты y_k как функции t и $2n$ произвольных постоянных α_k, β_k. Подставляя $y_k = y_k(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ во вторую группу уравнений (41), находим обобщенные импульсы x_k как функции t и $2n$ произвольных постоянных α_k, β_k. Якоби разработал и алгоритм решения обратной задачи [7, 165]: по известному общему решению канонической системы (1) можно построить полный интеграл $S(t;\ y_1, \ldots, y_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ уравнения Гамильтона — Якоби (38). Из теоремы Гамильтона — Якоби вытекает, что асимптотические методы решения канонических систем (1) и уравнения (38) эквивалентны с точки зрения полноты и точности их решения. Поэтому их применение в конкретных задачах в большой степени определяется привычкой и желанием исследователя.

Дважды непрерывно дифференцируемая функция S (аналогично функции F из формулы (6)) называется *производящей функцией канонического преобразования.* Она генерирует такое каноническое преобразование $(x, y) \to (x', y')$, в котором новый гамильтониан H' представляет собой постоянную величину

(можно ее положить равной нулю)

$$H'(t, x', t') \equiv \partial S/\partial t + H(t, \partial S/\partial y, y) = 0, \tag{5.42}$$

а само каноническое преобразование выражается равенствами

$$x = (\partial S/\partial y)^{\mathrm{T}}, \quad y' = (\partial S/\partial x')^{\mathrm{T}}. \tag{5.43}$$

Производящая функция $S(t, y, y')$, в которой t и y считаются аргументами, а y' — параметрами, должна удовлетворять также условию невырожденности преобразования:

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y\, \partial y'}\right) \neq 0.$$

§ 5.3. Теоремы Пуассона. Адиабатические инварианты

Если дифференцируемая скалярная функция $f(x, y, t)$ сохраняет постоянное значение вдоль траекторий канонической системы (1), т. е. равенство $f(x(t), y(t), t) = c$ представляет собой ее первый интеграл, тогда справедливо равенство

$$\partial f/\partial t + (f, H) = 0, \tag{5.44}$$

где (f, H) — скобка Пуассона. Соотношение (44) часто называется теоремой Пуассона [158].

Комбинируя равенство (44) со свойствами скобок Пуассона (11)—(15), можно доказать, что если

$$f_1(x, y, t) = c_1, \quad f_2(x, y, t) = c_2$$

являются первыми интегралами канонической системы (1), то функция

$$f_3 = (f_1, f_2) = c \tag{5.45}$$

также является первым интегралом уравнений (1). Это утверждение известно в литературе также под названием «теоремы Пуассона» [158, 163, 165]. Иными словами, можно написать равенство

$$\partial (f_1, f_2)/\partial t + ((f_1, f_2), H) = 0, \tag{5.46}$$

выполняемое на траекториях гамильтоновой системы.

Можно было ожидать, что теорема Пуассона позволит находить новые первые интегралы канонических систем. К сожалению, это не так, хотя она и оказывается полезной в теории возмущений канонических систем.

В теореме Пуассона рассматриваются свойства первых интегралов гамильтоновых систем как функций, остающихся инвариантными (неизменяющимися) вдоль траекторий (решений) системы. Если решение $(x(t), y(t))$ гамильтоновой системы (1) существует при $t \in (-\infty, \infty)$, тогда равенство $f_3(x(t), y(t), t) = c$ выполняется на бесконечном интервале времени, т. е. вечно. По этой причине первые интегралы часто называют вечными инвариантами.

Полезным понятием при изучении эволюции решений гамильтоновых систем на конечных, но асимптотических больших интервалах времени (порядка μ^{-1}) является понятие адиабатического инварианта [166].

Скалярная функция $J(x, y, t)$ называется *адиабатическим инвариантом* канонической системы с гамильтонианом $H(x, y, t, \mu)$, если для любого $\varepsilon \geqslant 0$ существует такое $\mu_0 > 0$, что при $\mu \in (0, \mu_0)$ для всех $t \in (0, \mu^{-1})$ выполняется неравенство

$$|J(x(t, \mu), y(t, \mu), t) - J(x(0, \mu), y(0, \mu), 0)| < \varepsilon \qquad (5.47)$$

вдоль решения системы $x(t, \mu)$, $y(t, \mu)$.

Из этого определения следует, что для первых интегралов величину ε можно взять равной нулю. Знание адиабатических инвариантов гамильтоновых систем позволяет иногда значительно продвинуть проблему интегрируемости нелинейных систем.

§ 5.4. Метод вариации постоянных

Наряду с канонической системой (1)

$$dx/dt = -\partial H/\partial y, \quad dy/dt = \partial H/\partial x$$

рассмотрим такую «упрощенную» каноническую систему с гамильтонианом $H_0(x^{(0)}, y^{(0)}, t)$

$$dx^{(0)}/dt = -\partial H_0/\partial y^{(0)}, \quad dy^{(0)}/dt = \partial H_0/\partial x^{(0)}, \qquad (5.48)$$

общее решение которой

$$x^{(0)} = x^{(0)}(t, \alpha, \beta), \quad y^{(0)} = y^{(0)}(t, \alpha, \beta) \qquad (5.49)$$

известно. Здесь α и β — векторы размерности n с постоянными компонентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Так как равенства (49) выражают общее решение системы (48), то

$$\partial(x^{(0)}, y^{(0)})/\partial(\alpha, \beta) \neq 0, \qquad (5.50)$$

и, следовательно, равенства (49) разрешимы относительно произвольных постоянных α, β:

$$\alpha = \alpha(t, x^{(0)}, y^{(0)}), \quad \beta = \beta(t, x^{(0)}, y^{(0)}). \qquad (5.51)$$

Из условия, что канонические преобразования образуют группу [163], вытекает, что α, β как функции t, $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ также являются каноническими переменными и, следовательно, выполняются необходимые и достаточные условия каноничности преобразования типа (17), выраженные с помощью скобок Пуассона:

$$(\alpha_s, \alpha_k) = 0, \quad (\beta_s, \beta_k) = 0, \quad (\alpha_s, \beta_k) = \delta_{sk}, \qquad s, k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5.52)$$

Часто систему (48), как нам уже известно, называют невозмущенной, а систему (1) — возмущенной.

Сущность метода вариации произвольных постоянных состоит в том [158, 163, 167], что общее решение возмущенной системы (1) ищется в том же виде (49) (сохраняется форма функциональной зависимости x и y от t, α, β), но в предположении, что α и β уже являются не постоянными векторами, а вектор-функциями времени. Это означает, что и для возмущенной системы сохраняются соотношения (52), так же как сохраняются и соотношения вида (44):

$$\partial\alpha_k/\partial t+(\alpha_k,\ H_0)=0,\quad \partial\beta_k/\partial t+(\beta_k,\ H_0)=0. \tag{5.53}$$

Составляя выражения для полных производных по t функций α и β и учитывая уравнения (1) и равенства (53), можно вывести уравнения

$$d\alpha_k/dt=(\alpha_k,\ H-H_0),\quad d\beta_k/dt=(\beta_k,\ H-H_0), \tag{5.54}$$

которые и составляют систему уравнений возмущенного движения [163], эквивалентную (1).

Системе (54) в координатной форме можно придать и следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_k}{dt}&=\sum_{s=1}^{n}\left[(\alpha_k,\ \alpha_s)\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\alpha_s}+(\alpha_k,\ \beta_s)\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\beta_s}\right],\\ \frac{d\beta_k}{dt}&=\sum_{s=1}^{n}\left[(\beta_k,\ \alpha_s)\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\alpha_s}+(\beta_k,\ \beta_s)\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\beta_s}\right].\end{aligned} \tag{5.55}$$

В уравнениях (54), (55) гамильтонианы H и H_0 должны быть выражены с помощью замены вида (49) как функции t, α, β.

Кроме того, заметим, что в (55) скобки Пуассона или постоянны, или выражаются через α_k, β_k [163].

§ 5.5. Применение метода усреднения к каноническим системам. О нормализации канонических систем

Канонические системы (1) являются частным случаем систем с медленными и быстрыми переменными, поэтому изложенные в гл. I результаты, естественно, применимы и к ним. Если при этом мы хотим, чтобы преобразование $(x,\ y)\to(x',\ y')$ было каноническим, необходимо строить замену переменных таким образом, чтобы выполнялось условие Якоби — Пуанкаре (соотношения (6), (8), (9)).

Следует заметить, что при исследовании канонических систем метод усреднения особенно эффективен, когда либо гамильтониан периодичен по угловым переменным y, либо существует интегральное среднее гамильтониана по t (если H зависит явно от t).

Здесь повторяется ситуация, рассмотренная в предыдущих главах: процедура усреднения может быть достаточно эффективной в случае исследования колебательных процессов, описываемых периодическими или условно-периодическими функциями. Некоторые вопросы применимости метода усреднения к каноническим системам решены в работах [8, 12, 29, 31, 125, 168]. Здесь мы изложим в некотором смысле более общий алгоритм реализации метода усреднения для уравнений (1).

Пусть каноническая система (1) порождена 2π-периодическим по y гамильтонианом

$$H(x,\ y)=H_0(x)+\mu H_1(x,\ y). \tag{5.56}$$

Если гамильтониан $H(x,\ y)$ зависит от x, y так, как указано в (56), то канонические переменные x, y называются переменными «действие — угол» [158, 159]. Они играют особую роль в механике и допускают наглядную геометрическую интерпретацию, аналогичную той, которая описана в гл. III.

Вектор размерности n

$$\omega(x)=\partial H_0/\partial x \tag{5.57}$$

называется вектором основных частот гамильтоновой системы. С помощью такого вектора каноническая система (1) легко записывается в виде системы с медленными и быстрыми переменными (уравнения вида (45), (57) и др.).

В дальнейшем нам понадобится матрица Гесса размерности $n\times n$

$$\partial\omega/\partial x=\partial^2 H_0/\partial x^2,$$

определитель которой (гессиан) обозначим через

$$\Delta_\Gamma=\det(\partial\omega/\partial x). \tag{5.58}$$

Невырожденность матрицы Гесса ($\Delta_\Gamma\neq 0$), как мы увидим дальше, играет существенную роль в методах асимптотического интегрирования канонических систем.

Пусть каноническая система сравнения для (1) имеет вид

$$d\bar{x}/dt=-\partial\bar{H}/\partial\bar{y},\qquad d\bar{y}/dt=\partial\bar{H}/\partial\bar{x}, \tag{5.59}$$

где $\bar{H}(\bar{x},\ \bar{y})$ — новый гамильтониан, зависящий от новых канонических переменных $\bar{x}$, $\bar{y}$. Предположим также, что

$$\begin{aligned}&-\partial\bar{H}/\partial\bar{y}=\mu^2A_2(\bar{x})+\mu^3A_3(\bar{x})+\ldots,\\&\partial\bar{H}/\partial\bar{x}=\partial H_0(\bar{x})/\partial\bar{x}+\mu\partial\bar{H}_1/\partial\bar{x}+\mu^2B_2(\bar{x})+\ldots,\end{aligned} \tag{5.60}$$

где $A_k(\bar{x})$, $B_k(\bar{x})$, $k=2,\ 3,\ \ldots,$ — пока произвольные функции обобщенных импульсов $\bar{x}$. При таком задании частных производных, считая, что

$$\bar{H}_1=\bar{H}_1(\bar{x}), \tag{5.61}$$

имеем соотношения:

$$\mu^2 A_2(\bar{x}) + \mu^3 A_3(\bar{x}) + \ldots = 0, \tag{5.62}$$

$$d\bar{x}/dt = 0, \tag{5.63}$$

$$\partial^2 \bar{H}/\partial\bar{x}\,\partial\bar{y} \equiv 0. \tag{5.64}$$

Уравнение (64) определяет равновесные решения первых уравнений канонической системы (59). Интегрирование второй подсистемы (59) в этом случае выполняется непосредственно:

$$\bar{y}(t, \mu) = \bar{\omega}(\bar{x}, \mu)t + y_0, \tag{5.65}$$

где

$$\bar{\omega}(\bar{x}, \mu) = \omega(\bar{x}) + \mu\partial\bar{H}_1/\partial\bar{x} + \mu^2 B_2(\bar{x}) + \ldots \tag{5.66}$$

Задание частных производных нового гамильтониана $\bar{H}$ в виде (60) фактически означает, что каноническая система сравнения (59) является усредненной системой любого приближения в смысле Боголюбова для (1), полученной с помощью оператора $M_y[H]$, т. е.

$$\bar{H}(x) = H_0(x) + \mu\bar{H}_1(x), \tag{5.67}$$

где

$$\bar{H}_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} H_1(x, y)\,dy_1\ldots dy_n. \tag{5.68}$$

Таким образом, ставится следующая задача: найти невырожденное, дважды непрерывно дифференцируемое каноническое преобразование $(x, y)\to(\bar{x}, \bar{y})$, которое переводит (1) в интегрируемую систему (59).

Ясно, что в общем случае такая замена не существует, однако ее отыскание в виде расходящихся асимптотических рядов представляется целесообразным и для практики часто конструктивным.

Итак, будем искать замену

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \mu u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \mu^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots,\\ y &= \bar{y} + \mu v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \mu^2 v_2(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots, \end{aligned} \tag{5.69}$$

преобразующую каноническую систему (1) в систему (59). Применяя методику, изложенную в гл. I, получим уравнения в частных производных для определения функций преобразования:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial\bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) = -\frac{\partial H_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial\bar{y}}, \tag{5.70}$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial\bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) = \frac{\partial H_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\bar{H}_1(\bar{x})}{\partial\bar{x}} + \left(\frac{\partial\omega(\bar{x})}{\partial\bar{x}}, u_1\right), \tag{5.71}$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) = -\left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial \bar{y}\partial \bar{x}}, u_1\right) - \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial \bar{y}^2}, v_1\right) - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{x}}\right) - A_2(\bar{x}), \tag{5.72}$$

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) = \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial \bar{x}^2}, u_1\right) + \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}}, v_1\right) + \left(\frac{\partial \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, u_2\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial^2 \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2}, u_1\right), u_1\right) - \left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{x}}\right) - B_2(\bar{x}), \tag{5.73}$$

$$\left(\frac{\partial u_3}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) = -\left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial \bar{y}\partial \bar{x}}, u_2\right) - \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial \bar{y}^2}, v_2\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial^3 H_1}{\partial \bar{y}\partial \bar{x}^2}, u_1\right), u_1\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial^3 H_1}{\partial \bar{y}^3}, v_1\right), v_1\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial^3 H_1}{\partial \bar{y}^2\partial \bar{x}}, u_1\right), v_1\right) - \left(\frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{x}}\right) - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{r}}, A_2\right) - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}, B_2\right) - A_3(\bar{x}), \tag{5.74}$$

. . . .

Система (70)—(74), как и аналогичные системы, приведенные в гл. III, может быть последовательно проинтегрирована. Действительно, если считать, что гамильтониан $H(x, y)$ аналитичен по x, y, то в силу 2π-периодичности по y функции $H_1(x, y)$ ее можно представить n-кратным рядом Фурье

$$H_1(x, y) = \sum_{\|k\|\geqslant 0} h_k(x)\exp\{i(k, y)\}. \tag{5.75}$$

Подставляя (75) в (70), получим уравнение

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) = -\sum_{\|k\|\geqslant 1} ikh_k(\bar{x})\exp\{i(k, \bar{y})\},$$

которое после интегрирования дает

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}) = -\sum_{\|k\|\geqslant 1} kh_k(\bar{x})\frac{\exp\{i(k, \bar{y})\}}{(k, \omega(\bar{x}))}. \tag{5.76}$$

Формула (76) применима, если отсутствуют резонансные соотношения вида $(k, \omega(\bar{x}))=0$. В противном случае следует применить в полном объеме алгоритм решения, изложенный в § 1.7.

Отметим лишь тот факт, что здесь сразу возникает проблема малых знаменателей (см. формулу (76)), которая и приводит к расходимости рядов (69).

В отличие от алгоритма определения произвольных функций $A_2(\bar{x})$, $B_2(\bar{x})$, ..., изложенного в гл. I и гарантирующего существование периодического по $\bar{y}$ преобразования Крылова — Боголюбова (69), здесь следует учесть одно из условий каноничности преобразования $(x, y)\to(\bar{x}, \bar{y})$.

Рассмотрим два случая.

1. Из условия существования нового гамильтониана $\overline{H}(\bar{x}, \bar{y})$ следует равенство (64). Оно может быть удовлетворено, в частности, если положить

$$A_2(\bar{x}) \equiv A_3(\bar{x}) \equiv \ldots \equiv 0.$$

Тогда в уравнениях (70) — (74) сохраняются как произвольные функции только $B_2(\bar{x})$, $B_3(\bar{x})$, ..., и их можно выбрать таким образом, чтобы в правых частях некоторых уравнений системы (70) — (74) отсутствовали непериодические по $\bar{y}$ слагаемые.

Например, функцию $B_2(\bar{x})$ можно вычислить по формуле

$$B_2(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial^2 H_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^2}, u_1 \right) + \left(\frac{\partial^2 H_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}, v_1 \right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, u_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial^2 \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2}, u_1 \right), u_1 \right) - \left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial \bar{x}} \right) \right] d\bar{y}_1 \ldots d\bar{y}_n, \tag{5.77}$$

и это гарантирует «периодический вид» функции преобразования $v_2(\bar{x}, \bar{y})$. Непосредственное интегрирование уравнений (70) и (71) дает для $u_1(\bar{x}, \bar{y})$ и $v_1(\bar{x}, \bar{y})$ периодические представления. К сожалению, этого нельзя сказать о функциях $u_2(\bar{x}, \bar{y})$, $u_3(\bar{x}, \bar{y})$, ... (если считать, что $A_2(\bar{x}) \equiv A_3(\bar{x}) \equiv \ldots \equiv 0$). Таким образом, в этом случае преобразование Крылова — Боголюбова не будет, вообще говоря, периодическим, хотя оно относительно просто находится.

2. Пусть условие (64) выполняется при отличных от нуля функциях $A_2(\bar{x})$, $A_3(\bar{x})$, ... Тогда по крайней мере некоторые из них могут быть определены по формулам вида (77), дающим «нулевые средние по $\bar{y}$» правых частей уравнений для $u_2(\bar{x}, \bar{y})$, $u_3(\bar{x}, \bar{y})$ и т. д., а остальные должны определяться из равенства (64). Этот прием позволяет уничтожить некоторые непериодические слагаемые в преобразовании Крылова — Боголюбова, но, к сожалению, не все.

Резюмируя сказанное, можем заключить, что существует непериодическое по $\bar{y}$ преобразование Крылова — Боголюбова (69), которое преобразовывает каноническую систему (1) в каноническую систему (59) с гамильтонианом

$$\overline{H}(\bar{x}) = H_0(\bar{x}) + \mu H_1(\bar{x}) + \int [\mu^2 B_2(\bar{x}) + \ldots] \, d\bar{x}. \tag{5.78}$$

Преобразование Крылова — Боголюбова определяется из уравнений (70) — (74), которые интегрируются непосредственно до любого индекса, а функции $B_2(\bar{x})$, $B_3(\bar{x})$, ... определяются формулами вида (77), означающими, что средние значения по $\bar{y}$ правых частей уравнений для $v_2(\bar{x}, \bar{y})$, $v_3(\bar{x}, \bar{y})$ и т. д. равны нулю.

Если гамильтониан системы (1) H (точнее, H_1) зависит явно от времени и ставится вопрос о ее преобразовании в автономную систему сравнения (59), но с гамильтонианом $\overline{H}(\bar{x}, \bar{y})$, частные производные которого выражаются равенствами

$$\begin{gathered} -\partial\overline{H}/\partial\bar{y} = \mu^2 A_2(\bar{x}, \bar{y}) + \mu^3 A_3(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots, \\ \frac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial H_0(\bar{x})}{\partial \bar{x}} + \mu \frac{\partial \widetilde{H}_1(\bar{x})}{\partial \bar{x}} + \mu^2 B_2(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots, \end{gathered} \tag{5.79}$$

где

$$\widetilde{H}_1(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \int_0^T H_1(\bar{x}, \bar{y}, t)\, d\bar{y}\, dt, \tag{5.80}$$

то в этом случае замену переменных $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$ следует искать в виде

$$\begin{gathered} x = \bar{x} + \mu u_1(\bar{x}, \bar{y}, t) + \mu^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}, t) + \ldots, \\ y = \bar{y} + \mu v_1(\bar{x}, \bar{y}, t) + \mu^2 v_2(\bar{x}, \bar{y}, t) + \ldots \end{gathered} \tag{5.81}$$

Уравнения в частных производных, определяющие функции $u_k(\bar{x}, \bar{y}, t)$, $v_k(\bar{x}, \bar{y}, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, имеют вид

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) + \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial H_1}{\partial \bar{y}}, \tag{5.82}$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) + \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial H_1}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, u_1\right), \tag{5.83}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) + \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial \bar{y}\,\partial \bar{x}}, u_1\right) - \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial \bar{y}^2}, v_1\right) - \\ - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial \bar{x}}\right) - A_2(\bar{x}, \bar{y}), \end{aligned} \tag{5.84}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v_2}{\partial \bar{y}}, \omega(\bar{x})\right) + \frac{\partial v_2}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial \bar{x}^2}, u_1\right) + \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial \bar{x}\,\partial \bar{y}}, v_1\right) + \\ + \left(\frac{\partial \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, u_2\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial^2 \omega(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2}, u_1\right), u_1\right) - \left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial \bar{x}}\right) - B_2(\bar{x}, \bar{y}), \end{aligned} \tag{5.85}$$

. . . .

Таким образом, замена переменных (81) преобразовывает неавтономную каноническую систему (1) в автономную каноническую систему (59) с правыми частями (79), которая, к сожалению, не обладает свойством разделения переменных, но более удобна для исследования, в частности для отыскания равновесных (стационарных) решений.

Интегрирование системы (82)—(85) и т. д. представляет собой сложную задачу, и в общем случае оно не может быть выполнено в аналитическом виде. Однако в том случае, когда существуют интегральные средние по времени от правых частей, можно применить для ее интегрирования алгоритм, изложенный в § 3.7.

При нахождении замены переменных (81) мы непосредственно не проверяли выполнение условий каноничности Якоби — Пуанкаре; они здесь могут быть записаны в виде

$$-\mu^2 \frac{\partial A_2}{\partial \bar{x}} - \mu^3 \frac{\partial A_3}{\partial \bar{x}} - \ldots = \mu^2 \frac{\partial B_2}{\partial \bar{y}} + \mu^3 \frac{\partial B_3}{\partial \bar{y}} + \ldots \tag{5.86}$$

или

$$\frac{\partial A_k(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial B_k(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}}, \qquad k = 2, 3, \ldots; \tag{5.87}$$

поэтому определение произвольных функций $A_k(\bar{x}, \bar{y})$, $B_k(\bar{x}, \bar{y})$ как средних по времени значений правых частей уравнений (84), (85) и т. д. (см. алгоритм, изложенный в § 3.7) здесь не может быть реализовано. Если некоторые из этих функций определяются как «средние значения», то другие должны определяться из равенств (87), в противном случае нарушается каноничность преобразования (81). Таким образом, каноническое преобразование Крылова — Боголюбова в общем случае не может быть периодическим по $\bar{y}$. И наоборот, с помощью периодического преобразования каноническая система (1) преобразуется в неканоническую систему.

Наконец, если вместо усреднения по $\bar{y}$ и t (формула (80)) ввести усреднение только по времени, т. е. если

$$\tilde{H}_1(x, y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T H_1(x, y, t)\, dt, \tag{5.88}$$

то сразу можно заключить, что преобразованная система вида (59) не будет канонической, так как равенство (86) не будет иметь места.

Замечание. Так как ряды (69), (81), представляющие преобразование Крылова — Боголюбова для канонической системы (1), в общем случае являются расходящимися из-за наличия в их структуре малых знаменателей вида $(k, \omega(\bar{x})) \approx 0$, на практике всегда следует ограничиться конечными выражениями

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \mu u_1 + \mu^2 u_2 + \ldots + \mu^s u_s, \\ y &= \bar{y} + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \ldots + \mu^s v_s, \end{aligned} \tag{5.89}$$

которые удовлетворяют канонической системе с погрешностью порядка, вообще говоря, $O(\mu^s)$.

Задание частных производных гамильтониана $\overline{H}(\bar{x}, \bar{y})$ в виде (60) означает на самом деле выписывание нового гамильтониана в более простом аналитическом виде, чем первоначальное его выражение. В принятой терминологии можно сказать, что каноническая замена переменных $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$ является нормализующим преобразованием [161], а гамильтониан (67) имеет нормальную форму. Преобразование гамильтонианов к более простой форме называется нормализацией гамильтонианов. Естественно, термин «более простая форма гамильтониана» достаточно неопределенный, поэтому можно говорить о различных методах нормализации гамильтонианов и гамильтоновых систем. Наиболее известный классический метод был предложен Дж. Биркгофом [162], и мы в § 5.7 остановимся на нем более подробно.

Можно считать, что замена переменных вида (69) с добавлением к ней условий каноничности является нормализующей для канонической системы с гамильтонианом (56), а нормализованный гамильтониан (67) является наиболее простым, так как преобразованная каноническая система стала интегрируемой. Однако, как подчеркивалось, преобразование (69) является, вообще говоря, расходящимся, и, следовательно, вопрос о существовании таких нормализующих канонических преобразований остается открытым.

В заключение заметим, что во многих задачах процедура нормализации гамильтонианов применяется для того, чтобы их привести к виду (56), т. е. к тому виду, который был исходным для метода усреднения.

§ 5.6. Применение метода усреднения к уравнению Гамильтона — Якоби

Вернемся к уравнению Гамильтона — Якоби (38)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial y_n}, y_1, \ldots, y_n\right) = 0$$

и предположим, что гамильтониан H имеет вид

$$H(t, x, y) = H_0(x) + \mu H_1(t, x, y). \tag{5.90}$$

Тогда уравнение (38) может быть записано в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0\left(\frac{\partial S}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial y_n}\right) + \mu H_1\left(t, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial y_n}, y_1, \ldots, y_n\right) = 0. \tag{5.91}$$

Нахождение полного интеграла уравнения (91) в общем случае представляется невозможным. В противном случае это означало бы существование таких канонических переменных, в которых происходит «разделение движений», т. е. существует такое

$2n$-мерное каноническое фазовое пространство, в котором траектории динамической системы представляются n-частотными кривыми на n-мерных торах [17]. Поэтому целесообразно поставить вопрос о его приближенном интегрировании. Одним из методов приближенного интегрирования является, как мы знаем, метод усреднения. Он может быть использован для сглаживания самих канонических систем, и в этом случае применимы все алгоритмы и приемы, изложенные в гл. I и III. Но возможно применить процедуру усреднения и непосредственно к гамильтониану H (а не к его частным производным, составляющим правые части канонических систем), т. е. к уравнению в частных производных Гамильтона — Якоби. Например, если применить к «малой функции» μH_1 оператор усреднения (80), то мы получаем уравнение

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H_0\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y_n}\right) + \mu \tilde{H}_1\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y_n}\right) = 0. \qquad (5.92)$$

В результате применения оператора усреднения (68) к автономному гамильтониану (56) получаем уравнение в частных производных

$$H_0\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{S}}{\partial y_n}\right) + \mu \bar{H}_1\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{S}}{\partial y_n}\right) = h. \qquad (5.93)$$

Решение уравнений в частных производных (92), (93) в конкретных задачах часто представляет собой значительно более простую задачу, чем решение неусредненных уравнений (38), (91). Однако в общем случае остается неясным вопрос о близости решений первоначального и усредненного уравнения Гамильтона — Якоби, так как обоснование метода усреднения, примененного непосредственно к уравнениям в частных производных, далеко от завершения.

§ 5.7. Метод Биркгофа нормализации гамильтониана

Упрощение (или нормализация) гамильтонианов, конечно, не является самоцелью. Приведение гамильтониана к нормальной форме часто позволяет эффективно решить вопрос об устойчивости или неустойчивости частных решений гамильтоновых систем (положений равновесия, периодических или условно-периодических решений).

Вернемся к канонической системе (1)

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — n-мерные обобщенные импульсы и координаты, $H = H(x, y, t)$ — ее гамильтониан. Предположим, что в окрестности положения равновесия $x=y=0$ функция Гамильтона представима в виде ряда

$$H=H_2+H_3+\ldots+H_m+\ldots, \tag{5.94}$$

где H_m — однородный полином степени m относительно координат и импульсов:

$$H_m(t, x, y)=\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n+\mu_1+\ldots+\mu_n=m} h_{\nu_1\nu_2\ldots\mu_n} x_1^{\nu_1}\ldots x_n^{\nu_n} y_1^{\mu_1}\ldots y_n^{\mu_n}, \tag{5.95}$$

а показатели степеней $\nu_1, \ldots, \nu_n, \mu_1, \ldots, \mu_n$ — целые неотрицательные числа; $h_{\nu_1\nu_2\ldots\mu_n}$ — вещественные коэффициенты, которые в случае неавтономной системы зависят от времени t. Нормализовать систему (1) означает, как уже нам известно, найти такую близкую к тождественной каноническую систему переменных

$$(x, y)\to(X, Y), \tag{5.96}$$

чтобы гамильтониан, записанный в новых переменных X, Y, удовлетворял некоторым, заранее указанным нами требованиям.

Первый завершенный метод нормализации гамильтонианов был изложен Дж. Биркгофом [162], хотя и до него Ш. Делоне [22] и С. Ньюкомб [110] фактически пользовались таким математическим аппаратом в теории движения Луны и больших планет.

В методе Биркгофа нормализующее преобразование (96) задается неявно с помощью производящей функции $S(X, y, t)$ и имеет вид

$$x=\partial S/\partial y, \tag{5.97}$$

$$Y=\partial S/\partial X. \tag{5.98}$$

Представим функцию S в виде

$$S=(X, y)+S_3+\ldots+S_m+\ldots \tag{5.99}$$

(через (X, y) обозначено скалярное произведение X и y), а новую функцию Гамильтона $K(t, X, Y)$ запишем в виде ряда

$$K=K_2+K_3+\ldots+K_m+\ldots \tag{5.100}$$

Установим связь между H_m, S_m, K_m с помощью известной формулы теории канонических преобразований (см. § 5.2)

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t, \frac{\partial S}{\partial y}, y\right)\equiv K(t, X, Y). \tag{5.101}$$

Из (97), (98) имеем

$$x=X+\ldots+\frac{\partial S_m}{\partial y}+\ldots, \quad Y=y+\ldots+\frac{\partial S_m}{\partial X}+\ldots \tag{5.102}$$

Подставляя (102) в (101) и приравнивая члены одинакового порядка относительно переменных, получим

$$K_2(X, y) = H_2(X, y), \tag{5.103}$$

$$\frac{\partial S_m}{\partial X}\frac{\partial H_2}{\partial y} - \frac{\partial S_m}{\partial y}\frac{\partial H_2}{\partial X} - \frac{\partial S_m}{\partial t} = H_m - K_m. \tag{5.104}$$

Отсюда видно, что форма второго порядка в разложении функции Гамильтона не изменила своего вида. Подставим (103) в (104) и отметим, что в получившемся уравнении переменные X, y являются, по существу, «фиктивными» и могут быть заменены на любую пару переменных x, y или X, Y. Тогда уравнение (104) запишется так:

$$BS_m = H_m - K_m; \tag{5.105}$$

здесь оператор B имеет вид

$$B \equiv \left(\frac{\partial H_2}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial X}\right) - \left(\frac{\partial H_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial t}. \tag{5.106}$$

С помощью скобок Пуассона действие оператора B на произвольную скалярную функцию можно представить в виде

$$Bf(t, X, y) = (H_2(X, y), f(t, X, y)) - \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{5.107}$$

В (107) первое слагаемое означает скобки Пуассона, а не скалярное произведение, так как функции H_2 и f являются скалярными.

Таким образом, задача нормализации функции Гамильтона сводится к решению операторного уравнения (105) для каждого целого числа m. В уравнении (105) неизвестными являются функции S_m и K_m. В каждой конкретной задаче для его решения надо учесть те или иные требования, предъявляемые к виду нормальной формы гамильтониана. Решив уравнение (105) и использовав в тождестве (101) члены следующего порядка относительно координат и импульсов, можно найти члены K_{m+1} и т. д., получившиеся после нормализации формы m-го порядка. Затем можно решить уравнение (105) для членов порядка $m+1$, найти члены K_{m+2} и т. д. Процедуру можно продолжить до членов нужного порядка. Наконец, используя формулы (97), (98), можно найти явный вид преобразования (96).

Вместе с тем отметим, что изложенный классический метод Биркгофа обладает рядом существенных недостатков, особенно проявляющихся при нормализации многомерных гамильтоновых систем до членов высокого порядка с применением ЭВМ:

1) нахождение явного вида преобразования требует фактического выполнения очень громоздких вычислений. В самом деле, для выражения старых переменных x, y через новые X, Y

надо сначала обратить уравнение (98), чтобы выразить вектор координат y через новые переменные X, Y, а потом результат обращения подставить в правую часть уравнения (97), чтобы явно выразить вектор старых импульсов x через X, Y. С практической точки зрения обращение этих уравнений и нелинейная замена в них являются весьма трудоемкими операциями, которые к тому же при машинной реализации этих алгоритмов требуют много машинного времени и понижают точность получаемых результатов;

2) для получения обратного преобразования $(X, Y) \to (x, y)$ нужно выполнить такой же объем вычислений;

3) неявные соотношения метода Биркгофа не дают общего алгоритма преобразования достаточно произвольной функции первоначальных фазовых переменных в функцию новых переменных X, Y;

4) с практической точки зрения также существенным неудобством является то, что нормализация проводится последовательно для каждого числа m и нет общих рекуррентных формул нормализации.

В практических задачах удавалось нормализовать гамильтониан до 3-го, 4-го порядка ($m = 3, 4$), однако выполнение нормализации по Биркгофу до более высокого порядка «вручную» становится безнадежным делом не только с точки зрения количества арифметических и алгебраических операций, но и с точки зрения эффективного контроля их правильного выполнения.

§ 5.8. Метод нормализации Хори — Депри

Устранение недостатков классического метода Биркгофа стало возможно благодаря работам Дж. Хори [168] и А. Депри [169], в которых предложен новый способ построения канонического преобразования (96). Они использовали хорошо известную старую идею: множество траекторий гамильтоновой системы преобразовывает фазовое пространство по правилам канонических преобразований. Практическая реализация таких канонических преобразований опирается на использование рядов и преобразований Ли [170, 171]. После работ Хори и Депри появился ряд исследований, посвященных более детальной разработке метода нормализации Хори — Депри и его различным модификациям. Среди них наиболее значительными являются работы А. П. Маркеева и А. Г. Сокольского [172—174]. Эти авторы не ограничились теоретическими исследованиями, а разработали машинные алгоритмы и комплексы программ нормализации гамильтоновых систем в окрестности положения равновесия $x = y = 0$. Дальнейшее изложение метода Хори — Депри мы будем вести, опираясь в основном на работы А. П. Маркеева и А. Г. Сокольского.

Методы Депри и Хори разработаны в замкнутом рекуррентном виде. Это означает, что, задав на входе алгоритма значения коэффициентов исходной функции Гамильтона и указав порядок, до которого надо проводить нормализацию (или какое-нибудь другое условие, согласно которому надо прекратить нормализацию), на выходе этой процедуры можно получить коэффициенты нормализованной функции Гамильтона. Если необходимо, то можно получить и коэффициенты нормализующего преобразования. При нормализации могут потребоваться некоторые дополнительные сведения, например информация о встречающихся резонансах. Но можно задать всю эту информацию и на самом первом этапе. Рекуррентность методов означает, что ни процедура нормализации гамильтониана до какого-нибудь порядка m, ни процедура вычисления поправок к формам более высокого порядка не зависят от самой величины m.

Сначала изложим основы метода Хори.

Пусть заданы аналитические в некоторой области G_{2n} функции $f(x, y)$, $S(x, y)$ канонически сопряженных переменных $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и определены следующие операторы:

$$D_s^0 f = f, \tag{5.108}$$

$$D_s f \equiv D_s^1 f = (f, S), \tag{5.109}$$

$$D_s^n f = D_s\left(D_s^{n-1} f\right), \tag{5.110}$$

где символом $(\ ,\ )$ обозначены скобки Пуассона. Если S является производящей функцией канонического преобразования $(x, y) \to (X, Y)$, где x, y — старые импульсы и координаты, X, Y — новые импульсы и координаты, то, как показал Хори [168], каноническое преобразование определяется формулами

$$x = X + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D_s^{k-1} \frac{\partial S}{\partial Y}, \quad y = Y + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D_s^{k-1} \frac{\partial S}{\partial X}, \tag{5.111}$$

где λ — малый параметр, от которого зависят гамильтониан и производящая функция. Ряды (111) будут сходящимися при достаточно малых значениях λ. Из метода Хори вытекает более общее утверждение: для любой аналитической по x, y, λ функции f имеет место разложение

$$f(x, y, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D_s^k f(X, Y, \lambda). \tag{5.112}$$

Пусть дана каноническая замена переменных (96), которая переводит систему (1) с гамильтонианом H в систему

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Y}, \quad \frac{dY}{dt} = \frac{\partial K}{\partial X} \tag{5.113}$$

с новым гамильтонианом K. Преобразование (96) представим в виде решения вспомогательной канонической системы дифференциальных уравнений с гамильтонианом S и временем λ

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial S}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = 0, \quad \frac{dF}{d\lambda} = \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{5.114}$$

Начальные условия при $\lambda = 0$ возьмем в виде

$$x = X,\ y = Y,\ t = t,\ F = H - K = 0.$$

Для простоты изложения будем считать, что исходная каноническая система является автономной.

Формально решение уравнений (114) можно представить в виде ряда Тейлора по степеням переменной λ, играющей роль параметра. Точнее, для произвольной скалярной функции $f(x, y)$ ряд Тейлора как частный случай ряда (112) есть

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D_s^k f(X, Y). \tag{5.115}$$

Отметим, что в определении $D_s^k f(X, Y)$ переменные X, Y можно заменить на любую другую пару канонических переменных, и в дальнейшем они будут указываться как аргументы только тогда, когда необходимо избежать двусмысленного толкования. Более подробно свойства оператора Ли описаны, например, в статье Депри [169]. Преобразование Ли (111) теперь может быть получено, если в (115) в качестве f брать последовательно $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, а параметр λ положить равным единице, так как решение уравнений (114) является чисто формальным и вопрос о сходимости вообще не рассматривается. Преобразование (111) часто называется преобразованием Ли с генератором S. Обратное преобразование $(X, Y) \to (x, y)$ получается из (111), (115) и имеет вид

$$X = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k D_s^k x}{k!}, \quad Y = y + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k D_s^k y}{k!}. \tag{5.116}$$

Оно генерируется производящей функцией $-S$.

Таким образом, прямое преобразование Ли произвольной функции f имеет вид (115):

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_s^k f(X, Y)}{k!},$$

а обратное преобразование той же функции можно записать в виде

$$f(X, Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k D_s^k f(x, y)}{k!}. \tag{5.117}$$

Отметим, что переменная λ существенной роли в этой теории не играет и использование ее — только удобный прием вывода соотношений (111).

Применим теперь преобразование Ли в теории возмущений. Представим функцию Гамильтона в виде

$$H(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k H_k(x, y). \tag{5.118}$$

Введение параметра μ, так же как и параметра λ, можно рассматривать как удобный прием записи разложения (118) (например, если ведется разложение по степеням координат и импульсов в окрестности положения равновесия, то в явной форме малый параметр вообще не присутствует).

Новую функцию Гамильтона и производящую функцию S преобразования Ли, которые удовлетворяют уравнениям (111), (113), также представим в виде рядов

$$K(X, Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k K_k(X, Y), \tag{5.119}$$

$$S(X, Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k S_k(X, Y), \tag{5.120}$$

т. е. будем рассматривать преобразования, близкие к тождественным. Оператор Ли запишем в виде

$$D_s = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k+1} D_s^{k+1}, \quad D_s^k f = (f, S_k).$$

Тогда, взяв в качестве функции f в (115) функцию Гамильтона, можно написать

$$H(x, y) = K(X, Y), \quad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} D_s^r H(X, Y) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r K_r(X, Y). \tag{5.121}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} DH(X, Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k+1} D_{k+1} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \mu^r H_r(X, Y) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k+1} H_{1k}(X, Y), \\ H_{1r} = \sum_{k=0}^{r} D_{k+1} H_{r-k}(X, Y). \end{gathered} \tag{5.122}$$

Дальше нижний индекс оператора D_s будем опускать.

Для оператора Ли степени k равенство (122) тогда можно записать в виде

$$D^k H(X, Y) = k! \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{k+r} H_{kr}(X, Y), \quad H_{kr} = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{r} D_{m+1} H_{k-1, r-m}. \tag{5.123}$$

В рекуррентных соотношениях (123) будем считать $k \geqslant 1$, $r \geqslant 0$. Если ввести еще обозначение

$$H_{0r} = H_r, \tag{5.124}$$

то равенства (123), (124) определяют функции H_{kr} полностью.

После подстановки (123) в (121) получим

$$K_m(X, Y) = \sum_{k=0}^{\infty} H_{k,m-k}(X, Y). \tag{5.125}$$

Величины H_{kr} можно трактовать как элементы бесконечной матрицы, в которых k означает номер строки, а r — номер столбца. Тогда K_m представляет собой сумму элементов m-й диагонали, а новый гамильтониан K — двойную бесконечную сумму элементов такой матрицы. При другой трактовке величин (123) процесс вычисления K_m по известным H_{kr} получил название «треугольный рекуррентный алгоритм» [172] и схематически может быть изображен в виде следующей таблицы:

$$\begin{tikzcd}
K_0 & H_{00} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dr] \\
K_1 & H_{10} \arrow[l] \arrow[d] & H_{01} \arrow[l] \arrow[dr] \\
K_2 & H_{20} \arrow[l] \arrow[d] & H_{11} \arrow[l] & H_{02} \arrow[l] \arrow[dr] \\
K_3 & H_{30} \arrow[l] \arrow[d] & H_{21} \arrow[l] & H_{12} \arrow[l] & H_{03} \arrow[l] \arrow[dr] \\
K_4 & H_{40} \arrow[l] & H_{31} \arrow[l] & H_{22} \arrow[l] & H_{13} \arrow[l] & H_{04} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

. . . .

называемой H-треугольником. Аналогичные таблицы можно записать и для x-треугольников, y-треугольников и т. д.

Уравнение (125) получено Мерсманом [175] и применимо не только к функции Гамильтона, но и к любой функции $f(x, y)$, имеющей представление (118). В частности, оно применимо к переменным x, y. Имея в виду в дальнейшем решение задачи о нормализации в окрестности положения равновесия, применим здесь уравнение (125) для нахождения производящей функции S с одновременным нахождением нового преобразованного гамильтониана. Необходимые при этом вычисления облегчаются, если следовать идее А. П. Маркеева [172] и написать основное уравнение (125) в виде

$$D_0S_r = G_r - K_r, \tag{5.126}$$

где $D_0S_r = -D_rH_0 = (S_r, H_0)$,

$$G_r = H_r + \sum_{k=0}^{r-2} D_{k+1}H_{r-k-1} + \sum_{k=2}^{r} H_{k,r-k}. \tag{5.127}$$

Назовем уравнение (126) *операторным уравнением Ли*. Явные выражения G_r через $H_r, \ldots, H_0$ и $K_{r-1}, \ldots, K_1$ при $r = 1, 2, 3, 4$ имеют вид

$$G_1 = H_1, \quad G_2 = H_2 + \frac{1}{2}D_1(H_1 + K_1),$$

$$G_3 = H_3 + \frac{1}{2}D_2(H_1 + K_1) + \frac{1}{2}D_1\left[H_2 + K_2 + \frac{1}{6}D_1(H_1 - K_1)\right], \tag{5.128}$$

$$G_4 = H_4 + \frac{1}{2}D_3(H_1 + K_1) + \frac{1}{2}D_2\left[H_2 + K_2 + \frac{1}{6}D_1(H_1 - K_1)\right] + \\ + \frac{1}{2}D_1\left[H_3 + K_3 + \frac{1}{6}D_1(H_2 - K_2) + \frac{1}{6}D_2(H_1 - K_1)\right].$$

Решая операторное уравнение (126) последовательно для $r = 1, 2, \ldots$, находим S_1, K_1, G_2, S_2, K_2 и т. д. до нужного при решении задачи порядка m. Затем, подставляя в (125) вместо H величины x, y, находим явный вид нормализующего преобразования (96) $(x, y) \to (X, Y)$.

Отметим, что описанную процедуру можно распространить на случай неавтономных гамильтоновых систем [175]. При этом в (126) оператор D_0 заменяется на оператор $D_0 + \partial/\partial t$, а функции G_m по-прежнему вычисляются по формуле (126). Однако если в автономном случае уравнения (126) сводятся к алгебраическим, то в неавтономном случае необходимо решать системы дифференциальных уравнений.

§ 5.9. Решение операторного уравнения Ли

Применим метод Хори — Депри к задаче нормализации функции Гамильтона возмущенного движения в окрестности положения равновесия канонической системы с автономным гамильтонианом H, представленным в окрестности положения равновесия $x = y = 0$ рядом

$$H = H_2 + \ldots + H_m + \ldots, \tag{5.129}$$

где H_m — однородный полином степени m, записанный в виде (95).

Сравнивая разложения (118) и (129), перепишем операторное уравнение (126) в виде

$$DS_m = G_m - K_m, \quad DS_m \equiv (S_m, H_2), \tag{5.130}$$

где D — оператор Ли с генератором H_2. Аналогичным образом можно переписать формулы (127), (128), заменив r на m с помощью соотношения $r = m - 2$.

Перед нормализацией членов H_3, H_4, ... в (129) необходимо зафиксировать конкретную форму H_2, соответствующую линейной системе канонических дифференциальных уравнений. Поэтому нелинейной нормализации (независимо от того, используется ли метод Хори — Депри или любой другой метод) должен предшествовать предварительный этап линейной нормализации.

Нормальная форма квадратичной части H_2 гамильтониана (129) зависит от кратности собственных значений соответствующей матрицы линеаризованной системы. Изучим сначала наиболее важный для приложений случай некратных (простых) чисто мнимых собственных значений.

Тогда движение, определяемое линейной системой с функцией Гамильтона H_2, устойчиво [176], частоты этого движения ω_s отличны от нуля, а функцию H_2 можно привести к виду

$$H_2 = \sum_{s=1}^{n} \frac{\lambda_s\left(x_s^2 + y_s^2\right)}{2}, \tag{5.131}$$

$$\lambda_s = \delta_s\omega_s, \quad \omega_s > 0, \quad \delta_s = \pm 1, \quad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Заметим, что такое приведение возможно и в случае равных частот $\omega_s > 0$, но при этом элементарные делители определяющей матрицы линейной системы должны быть простыми.

Представим формы S_m, G_m, K_m в виде (95) с коэффициентами $s_{\mu_1\ldots\nu_n}$, $g_{\mu_1\ldots\nu_n}$, $k_{\mu_1\ldots\nu_n}$ соответственно и введем обозначения

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ \ldots,\ \mu_n), \quad \boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n),\\ \boldsymbol{\eta} = (\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n) \equiv \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{l} = (l_1,\ \ldots,\ l_n) \equiv \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nu},\\ \nu = \sum_{s=1}^{n} \nu_s, \quad \mu = \sum_{s=1}^{n} \mu_s, \quad l = \sum_{s=1}^{n} l_s,\end{gathered} \tag{5.132}$$

где ν_s, μ_s, l_s — целые неотрицательные числа. Каждую форму P_m (т. е. формы S_m, G_m, K_m) степени m относительно n координат y и n импульсов x представим в виде суммы $P_m = \sum\limits_{l=m} P_{\mathbf{l}}$, где $P_{\mathbf{l}}$ означает совокупность таких членов из разложения вида (95), для которых суммы показателей степеней координат μ_s и импульсов ν_s одинаковы и равны l_s. Совокупность таких членов назовем гармоникой с характеристическим вектором $\mathbf{l}$.

Подставляя в операторное уравнение (130) формы S_m, G_m и K_m, нетрудно убедиться, что получающаяся система линейных алгебраических уравнений относительно $S_{\mu\nu}$ (с пока еще неопределенными $K_{\mu\nu}$ в правых частях) распадается на подсистемы независимых друг от друга уравнений, соответствующие гармоникам с характеристическими векторами $\mathbf{l}$. Поэтому в дальнейшем при решении операторного уравнения (130) будем рассматривать только члены, принадлежащие гармонике с данным характеристическим вектором $\mathbf{l}$. Общее число таких членов составит $N_{\mathbf{l}} = \prod_{s=1}^{n} (l_s + 1)$.

При решении операторного уравнения для данной гармоники перейдем к комплексным переменным x_s^*, y_s^* с помощью канонической замены переменных (здесь и далее i — мнимая единица)

$$x_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_s^* + i\delta_s y_s^*), \quad y_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (y_s^* + i\delta_s x_s^*). \tag{5.133}$$

Обратная замена имеет вид

$$x_s^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_s - i\delta_s y_s), \quad y_s^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (y_s - i\delta_s x_s). \tag{5.134}$$

В переменных x_s^*, y_s^* функция H_2 принимает вид

$$H_2^* = i \sum_{s=1}^{n} \omega_s x_s^* y_s^*, \tag{5.135}$$

а коэффициенты форм H_m^* удовлетворяют «соотношениям вещественности»

$$h_{\nu\mu}^* = i^m \prod_{s=1}^{n} \delta_s^{l_s} \bar{h}_{\nu\mu}^*, \tag{5.136}$$

где $\bar{h}_{\nu\mu}^*$ — сопряженное комплексное число.

Подставляя (135) в (130) (S_m^*, G_m^*, K_m^* — соответствующие формы, записанные в комплексных переменных), получаем, что операторное уравнение распадается на $N_{\mathbf{l}}$ независимых уравнений

$$d_{\mu\nu} S_{\mu\nu}^* = g_{\mu\nu}^* - k_{\mu\nu}^*, \quad d_{\mu\nu} = i \sum_{s=1}^{n} \omega_s \eta_s. \tag{5.137}$$

Если $d_{\mu\nu} \neq 0$, то в уравнении (137) можно коэффициент новой функции Гамильтона $k_{\mu\nu}^*$ положить равным нулю, а коэффициент производящей функции вычислить по формуле

$$s_{\mu\nu}^* = g_{\mu\nu}^* / d_{\mu\nu}. \tag{5.138}$$

Это означает, что выбором коэффициента производящей функции по формуле (138) удалось уничтожить соответствующий член в новой функции Гамильтона.

Если $d_{\mu\nu} = 0$, то из уравнения (137) коэффициент $s_{\mu\nu}^*$ определить нельзя. Преобразование становится неоднозначным, а в новой функции Гамильтона соответствующие члены уничтожить нельзя. В этом случае надо положить $k^*_{\mu\nu} = g^*_{\mu\nu}$, а коэффициент производящей функции $s^*_{\mu\nu}$ можно взять, например, нулевым.

Рассмотрим случай, когда величина $d_{\mu\nu}$ может обратиться в нуль. Так как все числа ω_s положительны, то это может произойти только в двух случаях:

1) числа ω_s рационально независимы, а $\eta_s = 0$ для всех $s = 1, \ldots, n$;

2) существуют такие целые числа p_s $(s = 1, \ldots, n)$, что выполняется соотношение

$$\sum_{s=1}^{n} p_s\omega_s = 0, \tag{5.139}$$

или, по-другому,

$$\sum_{s=1}^{n} q_s\lambda_s = 0, \quad q_s = \delta_s p_s. \tag{5.140}$$

В последнем случае говорят, что имеет место резонанс (139). Как и в § 3.1, число $p = \sum_{s=1}^{n} |p_s|$ называется порядком резонанса, а $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ — резонансным вектором.

Сравнивая величины ω_s (или λ_s) с частотами многочастотных систем дифференциальных уравнений, убеждаемся, что они являются теми же частотами, поэтому здесь возникают трудности, аналогичные тем, с которыми мы встречались при асимптотическом интегрировании многочастотных систем (см. гл. III).

Рассмотрим сначала нерезонансный случай. Решая в целых числах систему уравнений $\mu_s + \nu_s = l_s$, $\mu_s - \nu_s = \eta_s = 0$, получаем $\mu_s = \nu_s = l_s/2$, т. е. все компоненты характеристического вектора гармоники $\mathbf{l}$ в этом случае могут быть только четными. Отсюда, в частности, следует, что в нерезонансном случае все члены нечетного порядка m в новой функции Гамильтона можно уничтожить полностью. Из членов четного порядка в K^*_m останутся только члены вида

$$k^*_{1/2,1/2}(X^*_1Y^*_1)^{l_1/2} \ldots (X^*_nY^*_n)^{l_n/2}, \tag{5.141}$$

коэффициенты которых $k^*_{1/2,1/2} = g^*_{1/2,1/2}$ суть числа или вещественные, или чисто мнимые (см. формулу (136)). Теперь в K^*_m и S^*_m по формулам, аналогичным (134), можно перейти к вещественным переменным X, Y, а затем к полярным переменным r_s, φ_s, используя замену

$$X_s = \sqrt{2r_s}\cos\varphi_s, \quad Y_s = \sqrt{2r_s}\sin\varphi_s. \tag{5.142}$$

Эти две замены можно объединить в одну и сразу от переменных

X^*, Y^* перейти к полярным переменным по формулам

$$X_s^* = \sqrt{r_s}\exp\{-i\delta_s\varphi_s\}, \quad Y_s^* = -i\delta_s\sqrt{r_s}\exp\{i\delta_s\varphi_s\}. \tag{5.143}$$

В переменных r_s, φ_s выражение (141) принимает вид

$$c_{1/2}\sqrt{r_1^{l_1}\ldots r_n^{l_n}}, \tag{5.144}$$

где вещественный коэффициент $c_{1/2}$ вычисляется по формуле (l_s, m — четные числа)

$$c_{1/2} = \left[(-1)^{m/4}\prod_{s=1}^{n}\delta_s^{l_s/2}\right]g^*_{1/2,1/2}. \tag{5.145}$$

Пусть теперь выполнено резонансное соотношение (139). Чтобы выяснить, какие члены нельзя уничтожить в новой функции Гамильтона, сравним соотношения (137) и (139). Решая относительно μ_s, ν_s системы уравнений $\mu_s+\nu_s=l_s$, $\mu_s-\nu_s=\pm p_s$, получаем

$$\mu_s=(l_s+p_s)/2, \quad \nu_s=(l_s-p_s)/2, \tag{5.146}$$

$$\mu_s=(l_s-p_s)/2, \quad \nu_s=(l_s+p_s)/2, \tag{5.147}$$

при этом, очевидно, надо, чтобы выполнялось неравенство

$$|p_s|\leqslant l_s, \qquad s=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{5.148}$$

Это означает, что если компоненты характеристического вектора удовлетворяют неравенствам (148), то в такой гармонике нельзя уничтожить по два члена с показателями степеней (146) и (147). При этом числа l_s и p_s должны иметь одинаковую четность.

Из (148) также видно, что резонанс порядка p первый раз проявляется при нормализации членов этого же порядка. Рассмотрим поэтому важный частный случай резонанса (139), когда его порядок p совпадает со степенью нормализуемой формы. Так как $\sum_{s=1}^{n}|p_s| = \sum_{s=1}^{n} l_s = m,$ то, учитывая (148), получаем, что резонансные члены останутся только в такой гармонике, для которой

$$l_s=|p_s|=\sigma_s p_s, \quad \sigma_s=\operatorname{sign} u_s, \quad s=1,\ \ldots,\ k. \tag{5.149}$$

Коэффициенты этих двух резонансных членов в K_m^* с показателями степеней (146) и (147) обозначим через $g^*_{\mu\nu}$ и $g^*_{\nu\mu}$. Эти числа являются комплексно-сопряженными, так как удовлетворяют соотношениям вещественности (136).

После перехода к полярным переменным r_s, φ_s по формулам (142) эти члены принимают вид

$$[A_p\sin\varphi_q + B_p\cos\varphi_q]\sqrt{r_1^{l_1}\ldots r_n^{l_n}}, \tag{5.150}$$

где (см. (140))

$$\varphi_q = \sum_{s=1}^{n} \sigma_s \delta_s l_s \varphi_s = \sum_{s=1}^{n} \delta_s p_s \varphi_s = \sum_{s=1}^{n} q_s \varphi_s, \tag{5.151}$$

а вещественные коэффициенты A_ρ и B_ρ вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} A_\rho = -2\,\mathrm{Im}\,\alpha = 2\,\mathrm{Im}\,\beta, \qquad B_\rho = 2\,\mathrm{Re}\,\alpha = 2\,\mathrm{Re}\,\beta, \\ \alpha = g^*_{\nu\mu} \prod_{s=1}^{n} (-i)^{l_s(1+\sigma_s)/2} \delta_s^{l_s(1-\sigma_s)/2}, \\ \beta = g^*_{\mu\nu} \prod_{s=1}^{n} (-i)^{l_s(1-\sigma_s)/2} \delta_s^{l_s(1+\sigma_s)/2}. \end{gathered} \tag{5.152}$$

Аналогичным образом операторное уравнение (130) можно решить и для остальных гармоник данной формы H_m. После этого, зная S_m и K_m, можно вычислить G_{m+1} по формулам (127) и продолжить нормализацию до членов нужного порядка, причем уже нормализованные члены в K_m меняться не будут.

В нерезонансном случае нормальная форма степени M (т. е. нормализация проводится до членов степени M относительно координат и импульсов) функции Гамильтона возмущенного движения будет иметь вид (см. (145))

$$K = K^{(M)} + K_{M+1} + \ldots, \tag{5.153}$$

$$K^{(M)} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s r_s + \sum_{m=2}^{[M/2]} \sum_{l=2m} c_{l/2} \sqrt{r_1^{l_1} \ldots r_n^{l_n}}. \tag{5.154}$$

Здесь все числа l_s четные, а квадратные скобки означают операцию взятия целой части числа.

Одно из полезных свойств нормальной формы (153) состоит в том, что система с укороченной функцией Гамильтона (154) является интегрируемой [162]:

$$r_s = r_s^{(0)} = \mathrm{const}, \quad \varphi_s = \left.\frac{\partial K^{(M)}}{\partial r_s}\right|_{t=t_0} (t - t_0) + \varphi_s^{(0)}. \tag{5.155}$$

Тогда алгоритм построения приближенного решения исходной гамильтоновой системы (1) состоит из следующих процедур:

1) по заданным в момент $t = t_0$ начальным значениям $x_s^{(0)}$, $y_s^{(0)}$ с помощью формул (116), (142) определяем $r_s^{(0)}$, $\varphi_s^{(0)}$;

2) по формулам (155) находим r_s, φ_s для любого наперед заданного момента времени t;

3) по формулам (142), (111) находим x_s, y_s в момент времени t; при этом в формулах прямой и обратной замен (111), (116) надо верхний предел ∞ в знаках суммы заменить на соответствующее конечное наперед выбранное значение.

В укороченной системе с гамильтонианом $K^{(M)}$ полярные переменные r_s, φ_s являются переменными «действие — угол».

В случае резонанса (139) порядка M нормальная форма функции Гамильтона будет иметь вид

$$K = K^{(M)} + R_M + K_{M+1} + \ldots, \tag{5.156}$$

$$R_M = c_p \sqrt{r_1^{l_1} \ldots r_n^{l_n}} \sin \varphi_q, \quad c_p = \sqrt{A_p^2 + B_p^2}. \tag{5.157}$$

Легко проверить, что в случае единственного резонанса укороченная система также является интегрируемой.

Знание нормальных форм позволяет не только проводить приближенное интегрирование, но и решать вопросы устойчивости положения равновесия (причем для полной, а не только для укороченной системы), существования, построения и исследования устойчивости периодических и условно-периодических движений в окрестности положения равновесия конкретных механических систем.

В заключение отметим, что коэффициенты $c_{1/2}$ в (154) и коэффициент c_p в (157) являются инвариантами функции Гамильтона относительно канонических преобразований [172], т. е. не зависят от способа нахождения нормальной формы.

§ 5.10. Описание комплекса программ для нормализации гамильтонианов

Процедура нормализации гамильтонианов и канонических систем становится эффективной, если для этого используются ЭВМ. Реализация описанных выше алгоритмов в виде комплекса стандартных программ нормализации выполнена А. П. Маркеевым и А. Г. Сокольским [172]. Этот комплекс можно разбить на три части (три иерархических уровня).

1) Программы (фортранные подпрограммы) работы с однородными полиномами, играющие служебную роль. К ним относятся программы сложения, умножения, частного дифференцирования полиномов произвольной степени от произвольного числа переменных. На входе этих программ задаются одномерные массивы переменной длины (длина массива зависит от степени полинома и от числа переменных), составленные из вещественных коэффициентов однородных полиномов. Коэффициенты считаются раз и навсегда упорядоченными по возрастающим степеням переменных, т. е. принят табличный способ задания полиномов (по классификации обзора [177]) с заранее сформирован-

ной таблицей перехода от одномерной индексации коэффициентов к индексации типа (95) и обратно. На выходе мы получаем также одномерные массивы, которые соответствуют коэффициентам полинома-результата. К этим программам также относятся программа вычисления скобок Пуассона от двух произвольных однородных полиномов, которая необходима для формирования величин G_m в (127), и программа, в результате работы которой осуществляется линейная замена переменных в заданном однородном полиноме с заданной матрицей замены. Эта программа необходима на предварительном этапе при приведении исходной квадратичной части гамильтониана к виду (131) (или к соответствующему виду в случае кратных частот).

2) Программы второго уровня являются основной частью описываемого комплекса и предназначены для решения уравнения (130) при заданном числе m и при заданной информации о наличии резонансов порядка m. В результате работы этих программ формируются коэффициенты формы G_m и вычисляются коэффициенты нормальной формы K_m и производящей функции S_m. Эти коэффициенты получаются по конечным формулам в результате диагонализации матрицы коэффициентов при $S_{\mu\nu}$. Диагонализацию этой матрицы осуществляет программа, на долю которой приходится наибольшая часть времени центрального процессора ЭВМ, требуемого для работы всего комплекса.

3) Программы третьего, верхнего иерархического уровня, по существу, являются управляющими для всего комплекса программ нормализации, и использование тех или иных из этих программ зависит от конкретной решаемой задачи. К числу предусмотренных в комплексе возможностей относятся: а) решение задач устойчивости, для которых достаточно провести нормализацию до какого-то не очень большого порядка m (как правило, $m = 4$, реже $m = 6$); б) построение высокоточных приближенных теорий движения, для которых учитываемый порядок членов может быть очень большим. В первом случае на входе достаточно задать коэффициенты исходного гамильтониана, а на выходе получить коэффициенты нормальной формы заданной степени m и заключение об устойчивости или неустойчивости рассматриваемого положения равновесия периодического или условно-периодического движения.

В комплекс также добавлены некоторые вспомогательные программы, позволяющие проводить нормализацию некоторых неавтономных гамильтоновых систем.

Описанный комплекс программ использовался его авторами при решении многих прикладных задач и позволяет в 3—4 раза сократить время решения (и «машинное», и «исследовательское» время) по сравнению с использовавшимися ранее способами решения задач такого же класса вычислительной сложности.

§ 5.11. Нормализация двумерных гамильтоновых систем (нерезонансный случай)

Описанный в предыдущем параграфе комплекс программ является универсальным в том смысле, что с его помощью можно нормализовать гамильтониан канонической системы с произвольным числом степеней свободы. Однако такой комплекс нуждается в больших ресурсах ЭВМ, поэтому для решения конкретных механических задач важное значение имеет создание быстродействующих вычислительных алгоритмов, нормализующих гамильтоновы системы с небольшим числом степеней свободы. Большое количество задач связано с нормализацией автономных гамильтоновых систем с двумя и тремя степенями свободы (порядок системы дифференциальных уравнений равен 4 или 6), для которых знание коэффициентов нормальной формы до членов четвертого порядка включительно позволяет часто решить задачу об устойчивости положения равновесия. При этом знание самого́ нормализующего преобразования (производящей функции) не является необходимым, а коэффициенты нормальной формы вычисляются через коэффициенты исходного гамильтониана с помощью явных и относительно простых формул. Соответствующие алгоритмы и основанные на них вычислительные программы разработаны и описаны в работах [173, 174].

Рассмотрим автономную гамильтонову систему (1) с двумя степенями свободы ($n=2$), функция Гамильтона которой записана в виде ряда (129) с членами вида (95).

Рассмотрим сначала линеаризованную систему уравнений с гамильтонианом H_2:

$$dx/dt = Ax,\ x^T = (x_1, x_2, y_1, y_2),\ A = JH_2^*,\ J = -J^T = \begin{pmatrix} 0_2 & E_2 \\ -E_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \tag{5.158}$$

где H_2^* — матрица Гесса, E_2, 0_2 — единичная и нулевая матрицы второго порядка.

Пусть определяющее уравнение линейной канонической системы (158)

$$\det(A - \sigma E_4) = 0 \tag{5.159}$$

не имеет корней с ненулевой вещественной частью (выполняется необходимое условие устойчивости положения равновесия) и все его корни имеют вид $\sigma_k = \pm i\lambda_j$ ($k = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2$; λ_j — вещественные числа).

Нормальная форма будет различной в случаях отсутствия или наличия резонансов ($\|k\|$ — порядок резонанса)

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = 0, \quad \|k\| = |k_1| + |k_2| > 0, \tag{5.160}$$

до четвертого порядка включительно.

Первый, предварительный этап нормализации сводится к нахождению такой невырожденной вещественной симплектической матрицы N, что преобразование

$$x = Ny, \quad y^T = (x_1', x_2', y_1', y_2'), \tag{5.161}$$

приводит линейную систему (158) к виду

$$dy/dt = A'y, \quad A' = JH_2^{*\prime}, \quad H_2^{*\prime} = (\partial^2 H_2'/\partial y^2), \tag{5.162}$$

соответствующему нормальной форме квадратичного гамильтониана $H_2'(x_1', x_2', y_1', y_2') = y^T H_2^{*\prime} y/2$. Список нормальных форм квадратичных гамильтонианов имеется в [9].

Для нахождения нормализующей матрицы N воспользуемся алгоритмом Сокольского [178]. Искомая матрица N линейного нормализующего преобразования (161) должна, во-первых, приводить матрицу A к виду A', т. е.

$$AN = NA'. \tag{5.163}$$

Во-вторых, она должна быть симплектической и вещественной, т. е. должны выполняться равенства

$$N^T JN = J, \quad N = \overline{N}, \tag{5.164}$$

где $\overline{N}$ — матрица с элементами, сопряженными элементам матрицы N.

Решение матричного уравнения (163) существует только тогда, когда матрицы A и A' имеют одинаковые жордановы формы G [3]. Будем искать матрицу N в виде $N = BC$, где матрица B составлена из собственных и присоединенных векторов a_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ матрицы A и, кроме того, она приводит последнюю к жордановой форме (т. е. $AB = BG$), а матрица C равна D^{-1}, где D — матрица, приводящая A' к той же жордановой форме, т. е. $A'D = DG$. При составлении матрицы C из собственных и присоединенных векторов матрицы A' произвольные постоянные, нормирующие эти векторы, определяются из условий вещественности и симплектичности матрицы N:

$$BC = \overline{BC}, \tag{5.165}$$

$$C^T FC = J, \quad F = B^T JB, \tag{5.166}$$

где F — кососимметрическая матрица, так как для ее элементов справедливы соотношения $f_{kn} = (a_k, Ja_n) = (J^T a_k, a_n) = -(a_n, Ja_k) = -f_{nk}$, $\|k\|, \|n\| = 1, 2, 3, 4$.

Для замыкания алгоритма приведем аналитический способ вычисления собственных и присоединенных векторов в случае простых собственных значений и при наличии резонансов первого и второго порядков [3].

В силу симплектичности матрицы $A = JH_2^*$ ее характеристический многочлен (левая часть уравнения (159)) имеет вид

$$\Delta(\sigma) = \sigma^4 - \alpha_2\sigma^2 - \alpha_4, \quad \alpha_2 = -(\omega_1^2 + \omega_2^2), \quad \alpha_4 = -\omega_1^2\omega_2^2, \tag{5.167}$$

где $\omega_j = |\lambda_j|$ — частоты линейной системы (158), причем $\omega_1 \geqslant \omega_2 \geqslant 0$.

Обозначим собственные и присоединенные векторы матрицы A через

$$a_1 = R_1 + iS_1, \quad a_2 = R_2 + iS_2, \quad a_3 = R_1 - iS_1, \quad a_4 = R_2 - iS_2$$

(комплексная сопряженность следует из комплексной сопряженности собственных значений). Матрица, присоединенная к определяющей, имеет вид [3]

$$X(\sigma) = \sigma^3E_4 + \sigma^2X_2 + \sigma X_1 + X_0, \tag{5.168}$$

$$X_2 = A - JH_2^*, \quad X_1 = A - \alpha_2E_4, \quad X_0 = A(A^2 - \alpha_2E_4).$$

В случае простых собственных значений определяющее уравнение (159) имеет простые корни $\sigma_1 = -\sigma_3 = i\omega_1$, $\sigma_2 = -\sigma_4 = i\omega_2$. Тогда в нашем случае для приведенной присоединенной матрицы [3] имеем

$$Y(\sigma) = X(\sigma), \quad \operatorname{rang} Y(\sigma_k) = 1, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{5.169}$$

Из (168) получаем

$$\operatorname{Re} Y(i\omega_1) = A(A^2 + \omega_2^2E_4), \tag{5.170}$$

$$\operatorname{Im} Y(i\omega_1) = \omega_1(A^2 + \omega_2^2E_4). \tag{5.171}$$

Тогда за вектор R_1 можно принять любой ненулевой столбец матрицы (170), а за S_1 — столбец с тем же номером в матрице (171). Векторы R_2 и S_2 получаются аналогичным образом из формул (170), (171) после замены ω_1 на ω_2 и ω_2 на ω_1.

Линейное преобразование (161) с матрицей

$$N = (b_1R_1,\ b_2R_1,\ \delta_1b_1S_1,\ \delta_2b_2S_2), \tag{5.172}$$

$$b_j = 1/\sqrt{|(R_j,\ JS_j)|}, \quad \delta_j = \operatorname{sign}(R_j,\ JS_j),$$

приводит квадратичную часть гамильтониана к такому нормальному виду (обозначения для переменных оставлены прежними):

$$H_2 = \frac{\lambda_1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{\lambda_2}{2}(x_2^2 + y_2^2), \tag{5.173}$$

где $\lambda_j = \delta_j\omega_j$, $\omega_1 > \omega_2 > 0$. Другой конструктивный алгоритм нормализации предложен А. П. Маркеевым [179].

§ 5.12. Нормализация двумерных гамильтоновых систем (резонансный случай)

Рассмотрим случай равных частот, когда определяющее уравнение (159) имеет корни $\sigma_1=\sigma_2=i\omega_1$, $\sigma_3=\sigma_4=-i\omega_1$. В зависимости от коэффициентов квадратичной формы H_2 возможны два подслучая:

1) определяющая матрица $A-\sigma E_4$ линейной системы (158) имеет непростые элементарные делители, т. е. $\operatorname{rang}(A-\sigma E_4)=3$;

2) элементарные делители простые, $\operatorname{rang}(A-\sigma E_4)=2$, и, следовательно, матрицу A можно привести к диагональному виду [3].

В случае непростых элементарных делителей нормальной формой гамильтониана H_2 в вещественных переменных называется выражение [180, 181]

$$H_2'=\frac{\delta}{2}\left(y_1'^2+y_2'^2\right)+\omega\left(x_1'y_2'-x_2'y_1'\right), \tag{5.174}$$

где величина $\delta=\pm 1$ определяется в процессе линейной нормализации. Соответствующая нормализующая матрица имеет вид

$$N=(b_1R_1,\ -b_1S_1,\ \delta(b_2S_1+b_1R_2),\ \delta(b_2R_1-b_1S_2)), \tag{5.175}$$

$$b_1=\frac{1}{\sqrt{|(R_1,\ JR_2)|}},\quad b_2=\frac{\delta}{2}b_1^3(S_2,\ JR_2),\quad \delta=\operatorname{sign}(R_1,\ JR_2),$$

где $a_j=R_j+iS_j$ $(j=1,\ 2)$ — нетривиальные решения уравнений $(A-i\omega E_4)a_1=0$, $(A-i\omega E_4)a_2=a_1$. Векторы R_1, S_1 в матрице (175) получаются из (170), (171), если положить $\omega_1=\omega_2=\omega$. Для определения присоединенного вектора рассмотрим производную $Y'(\sigma)$ приведенной присоединенной матрицы (169). Из (168) имеем [178]

$$\operatorname{Re}Y'(i\omega)=A^2-\omega^2E_4,\quad \operatorname{Im}Y'(i\omega)=2\omega A. \tag{5.176}$$

Тогда векторы R_2, S_2 в (175) будут столбцами матриц (176) с тем же номером, что уже выбран для столбцов R_1, S_1 матриц (170), (171).

После канонического преобразования валентности $\delta=\delta_1$:

$$x_j'=\delta_1x_j,\quad y_j'=y_j,\quad j=1,\ 2, \tag{5.177}$$

нормальная форма (174) окончательно примет вид

$$H_2=\frac{1}{2}\left(y_1^2+y_2^2\right)+\omega\left(x_1y_2-x_2y_1\right). \tag{5.178}$$

В случае простых элементарных делителей нормальная форма H_2 задается соотношением (173), а нормализующая матрица N определяется формулой (172), где $\omega_1=\omega_2=\omega$, причем в качестве векторов $a_1=R_1+iS_1$, $a_2=R_2+iS_2$ в матрице (172) можно взять любые два линейно независимых столбца комплексной матрицы

$C(i\omega)=A+i\omega E_4$ (см. [173]). Положим $\delta_1=1$, $\delta_2=-1$ (если $\delta_1=-1$, то воспользуемся преобразованием (177)). Заметим, что случай $\delta_1\delta_2>0$ при исследовании устойчивости тривиален, так как из знакоопределенности H_2 сразу следует устойчивость равновесного решения $x=y=0$ и нет нужды проводить анализ с привлечением нелинейных членов. Окончательно нормальная форма H_2 такова:

$$H_2=\frac{1}{2}\left(x_1^2+y_1^2\right)\omega-\frac{1}{2}\left(x_2^2+y_2^2\right)\omega. \qquad (5.179)$$

Рассмотрим случай нулевой частоты ($\omega_2=0$, $\omega_1>0$), когда определяющая матрица $A-\sigma E_4$ имеет непростые элементарные делители ($\operatorname{rang} H_2=3$). Здесь нормальной формой H_2' в вещественных переменных называется выражение [182]

$$H_2'=\frac{\delta_1\omega_1}{2}\left(x_1'^2+y_1'^2\right)+\frac{\delta_2 y_2'^2}{2},\quad \delta_1=\pm1,\ \delta_2=\pm1. \qquad (5.180)$$

Нормализующая матрица N в этом случае имеет вид

$$N=(b_1R_1,\ b_2a_2,\ \delta_1b_1S_1,\ \delta_2b_2a_4), \qquad (5.181)$$

$$b_1=1/\sqrt{|(R_1,\ JS_1)|},\quad b_2=1/\sqrt{|(a_2,\ Ja_4)|},$$

$$\delta_1=\operatorname{sign}(R_1,\ JS_1),\ \delta_2=\operatorname{sign}(a_2,\ Ja_4),$$

где $a_1=R_1+iS_1$, a_2, a_4 — решения уравнений

$$(A-i\omega E_4)a_1=0,\quad Aa_2=0,\quad Aa_4=a_2.$$

Векторы R_1, S_1 определяются из (170), (171), причем $\omega_1>0$, $\omega_2=0$. Для нулевого собственного значения получим

$$Y(0)=A\left(A^2+\omega_1^2E_4\right), \qquad (5.182)$$

$$Y'(0)=A^2+\omega_1^2E_4. \qquad (5.183)$$

Тогда в качестве вектора a_2 в (181) можно принять любой ненулевой столбец матрицы (182), а за a_4 — столбец с тем же номером в матрице (183); см. [181].

Преобразуя (180) с помощью (177), окончательно получаем

$$H_2=\frac{\omega_1}{2}\left(x_1^2+y_1^2\right)+\frac{\delta y_2^2}{2},\quad \delta=\delta_1\delta_2. \qquad (5.184)$$

Случай одной нулевой частоты с простыми элементарными делителями и случай двух нулевых частот рассмотрены в работах [178, 182].

Приведение выражения второго порядка гамильтониана H_2 к нормальной форме (эта форма, как мы видели, различна в зависимости от того, имеет место или отсутствует резонанс частот линеаризованной системы), конечно, не всегда решает вопрос об устойчивости равновесного решения $x=y=0$. В этих случаях возникает задача о нелинейной нормализации двумерной гамильтоновой системы.

Будем теперь считать, что квадратичная часть гамильтониана (129) нормализована и принимает один из видов (173), (178), (179) или (184).

Далее, согласно § 5.9, надо решить операторное уравнение Ли (130) для каждого порядка $m=3, \ldots, M$, где M — максимальная степень учитываемых членов в разложении (129). Имея в виду прежде всего решение задачи об устойчивости тривиального положения равновесия $x=y=0$, ограничимся нормализацией до членов четвертого порядка включительно (т. е. будем считать, что $m=3, 4$ в операторном уравнении (130)). По этой же причине приведем лишь формулы для коэффициентов нормальных форм, не выписывая явного вида нормализующего преобразования (это легко сделать, используя выписанные ниже формулы и результаты § 5.9).

Вначале допустим, что все собственные значения матрицы A простые, т. е. $\omega_1>\omega_2>0$. В системе с гамильтонианом (129), где H_2 уже имеет нормальный вид (173), сразу перейдем к полярным переменным по формулам (аналогичным формулам (142))

$$x_j=\sqrt{2\rho_j}\sin\psi_j,\quad y_j=\sqrt{2\rho_j}\cos\psi_j,\qquad j=1,\ 2.$$

В полярных переменных имеем

$$H_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s_1+s_2=3}U_{s_1s_2}(\psi_j)\sqrt{\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}},\tag{5.185}$$

$$H_4=\frac{1}{2}\sum_{s_1+s_2=4}U_{s_1s_2}(\psi_j)\sqrt{\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}},\tag{5.186}$$

где

$$\begin{aligned}
U_{30}&=a_1^{(30)}\sin\psi_1+a_2^{(30)}\sin 3\psi_1+b_1^{(30)}\cos\psi_1+b_2^{(30)}\cos 3\psi_1,\\
U_{21}&=a_1^{(21)}\sin\psi_2+a_2^{(21)}\sin(2\psi_1-\psi_2)+a_3^{(21)}\sin(2\psi_1+\psi_2)+\\
&\qquad+b_1^{(21)}\cos\psi_2+b_2^{(21)}\cos(2\psi_1-\psi_2)+b_3^{(21)}\cos(2\psi_1+\psi_2),\\
U_{40}&=c_{40}+a_1^{(40)}\sin 2\psi_1+a_2^{(40)}\sin 4\psi_1+b_1^{(40)}\cos 2\psi_1+b_2^{(40)}\cos 4\psi_1,\\
U_{31}&=a_1^{(31)}\sin(\psi_1-\psi_2)+a_2^{(31)}\sin(\psi_1+\psi_2)+a_3^{(31)}\sin(3\psi_1-\psi_2)+\\
&\qquad+a_4^{(31)}\sin(3\psi_1+\psi_2)+b_1^{(31)}\cos(\psi_1-\psi_2)+b_2^{(31)}\cos(\psi_1+\psi_2)+\\
&\qquad+b_3^{(31)}\cos(3\psi_1-\psi_2)+b_4^{(31)}\cos(3\psi_1+\psi_2),\qquad(5.187)\\
U_{22}&=c_{22}+a_1^{(22)}\sin 2\psi_1+a_2^{(22)}\sin 2\psi_2+a_3^{(22)}\sin(2\psi_1-2\psi_2)+\\
&\qquad+a_4^{(22)}\sin(2\psi_1+2\psi_2)+b_1^{(22)}\cos 2\psi_1+b_2^{(22)}\cos 2\psi_2+\\
&\qquad+b_3^{(22)}\cos(2\psi_1-2\psi_2)+b_4^{(22)}\cos(2\psi_1+2\psi_2).
\end{aligned}$$

Остальные функции $U_{s_1 s_2}$, входящие в формулы (185), (186), получаются из выражений (187) двусторонней заменой $s_1 \leftrightarrow s_2$, $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$. Коэффициенты этих тригонометрических многочленов выражаются через коэффициенты функций H_3 и H_4 (записанных после линейной нормализации) с помощью формул:

$$\begin{aligned} a_1^{(30)} &= 3h_{3000} + h_{1020}, & b_1^{(30)} &= h_{2010} + 3h_{0030}, \\ a_2^{(30)} &= -h_{3000} + h_{1020}, & b_2^{(30)} &= -h_{2010} + h_{0030}; \end{aligned} \tag{5.188}$$

$$\begin{aligned} a_1^{(21)} &= 2(h_{2100} + h_{0120}), & b_1^{(21)} &= 2(h_{2001} + h_{0021}), \\ a_2^{(21)} &= h_{2100} - h_{0120} + h_{1011}, & b_2^{(21)} &= -h_{2001} + h_{0021} + h_{1110}, \\ a_3^{(21)} &= -h_{2100} + h_{0120} + h_{1011}, & b_3^{(21)} &= -h_{2001} + h_{0021} - h_{1110}; \end{aligned} \tag{5.189}$$

$$\begin{aligned} a_1^{(12)} &= 2(h_{1200} + h_{1002}), & b_1^{(12)} &= 2(h_{0210} + h_{0012}), \\ a_2^{(12)} &= h_{1200} - h_{1002} + h_{0111}, & b_2^{(12)} &= -h_{0210} + h_{0012} + h_{1101}, \\ a_3^{(12)} &= -h_{1200} + h_{1002} + h_{0111}, & b_3^{(12)} &= -h_{0210} + h_{0012} - h_{1101}; \end{aligned} \tag{5.190}$$

$$\begin{aligned} a_1^{(03)} &= 3h_{0300} + h_{0102}, & b_1^{(03)} &= h_{0201} + 3h_{0003}, \\ a_2^{(03)} &= -h_{0300} + h_{0102}, & b_2^{(03)} &= -h_{0201} + h_{0003}; \end{aligned} \tag{5.191}$$

$$\begin{aligned} c_{40} &= 3h_{4000} + h_{2020} + 3h_{0040}, \\ a_1^{(40)} &= 2(h_{3010} + h_{1030}), & b_1^{(40)} &= 4(-h_{4000} + h_{0040}), \\ a_2^{(40)} &= -h_{3010} + h_{1030}, & b_2^{(40)} &= h_{4000} + h_{0040} - h_{2020}; \end{aligned} \tag{5.192}$$

$$\begin{aligned} a_1^{(31)} &= -(h_{2110} + 3h_{0130}) + (3h_{3001} + h_{1021}), \\ a_2^{(31)} &= (h_{2110} + 3h_{0130}) + (3h_{3001} + h_{1021}), \\ a_3^{(31)} &= (h_{2110} - h_{0130}) - (h_{3001} - h_{1021}), \\ a_4^{(31)} &= -(h_{2110} - h_{0130}) - (h_{3001} - h_{1021}), \\ b_1^{(31)} &= (3h_{3100} + h_{1120}) + (h_{2011} + 3h_{0031}), \\ b_2^{(31)} &= -(3h_{3100} + h_{1120}) + (h_{2011} + 3h_{0031}), \\ b_3^{(31)} &= -(h_{3100} - h_{1120}) - (h_{2011} - h_{0031}), \\ b_4^{(31)} &= (h_{3100} - h_{1120}) - (h_{2011} - h_{0031}); \end{aligned} \tag{5.193}$$

$$\begin{aligned} c_{22} &= 2(h_{2200} + h_{0220}) + 2(h_{2002} + h_{0022}), \\ a_1^{(22)} &= 2(h_{1210} + h_{1012}), \quad a_2^{(22)} = 2(h_{2101} + h_{0121}), \\ a_3^{(22)} &= -(h_{1210} - h_{1012}) + (h_{2101} - h_{0121}), \end{aligned} \tag{5.194}$$

$$\begin{aligned}
a_4^{(22)} &= -(h_{1210}-h_{1012})-(h_{2101}-h_{0121}),\\
b_1^{(22)} &= -2(h_{2200}-h_{0220})-2(h_{2002}-h_{0022}),\\
b_2^{(22)} &= -2(h_{2200}+h_{0220})+2(h_{2002}+h_{0022}),\\
b_3^{(22)} &= (h_{2200}-h_{0220})-(h_{2002}-h_{0022})+h_{1111},\\
b_4^{(22)} &= (h_{2200}-h_{0220})-(h_{2002}-h_{0022})-h_{1111}.
\end{aligned} \tag{5.194}$$

Остальные коэффициенты тригонометрических многочленов из выражения (186) получаются из (193), (194) двусторонней заменой $s_1 \leftrightarrow s_2$ в $a_n^{(s_1s_2)}$, $b_n^{(s_1s_2)}$ и $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$, $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$ в $h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ (аналогично (190), (191) получаются из (189), (188)).

С помощью нелинейной нормализующей замены переменных $(\rho_s, \psi_s) \to (r_s, \varphi_s)$ функции H_3 и H_4 (185), (186) можно значительно упростить. В случае отсутствия резонансов вида (160) до четвертого порядка включительно нормальные формы имеют вид

$$K = K_2 + K_4 + \ldots, \tag{5.195}$$

$$K_2 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2, \tag{5.196}$$

$$K_4 = C_{20} r_1^2 + C_{11} r_1 r_2 + C_{02} r_2^2, \tag{5.197}$$

где $C_{k_1,k_2} = c_{2k_1,2k_2}/2 - \tilde{c}_{2k_1,2k_2}/8$.

После введения обозначений

$$\begin{aligned}
d_{k_1,k_2} &= (k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)^{-1},\\
e_{s,k_1,k_2} &= \left(a_s^{(k_1k_2)}\right)^2 + \left(b_s^{(k_1k_2)}\right)^2,\\
\alpha_{s,k_1,k_2}^{j,n_1,n_2} &= a_s^{(k_1k_2)} b_j^{(n_1n_2)} - b_s^{(k_1k_2)} a_j^{(n_1n_2)},\\
\beta_{s,k_1,k_2}^{j,n_1,n_2} &= a_s^{(k_1k_2)} a_j^{(n_1n_2)} + b_s^{(k_1k_2)} b_j^{(n_1n_2)},\\
\gamma_{s,k_1,k_2}^{j,n_1,n_2} &= a_s^{(k_1k_2)} b_j^{(n_1n_2)} + b_s^{(k_1k_2)} a_j^{(n_1n_2)},\\
\delta_{s,k_1,k_2}^{j,n_1,n_2} &= -a_s^{(k_1k_2)} a_j^{(n_1n_2)} + b_s^{(k_1k_2)} b_j^{(n_1n_2)}
\end{aligned} \tag{5.198}$$

для коэффициентов $\tilde{c}$ имеем соотношения

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{40} &= 3d_{10}(e_{130}+e_{210}) + d_{01}e_{121} - d_{2,-1}e_{221} + d_{21}e_{321},\\
\tilde{c}_{22} &= 4\left(d_{10}\beta_{130}^{112} + d_{2,-1}e_{221} + d_{-1,2}e_{212}\right) +\\
&\qquad + 4\left(d_{01}\beta_{103}^{121} + d_{21}e_{321} + d_{12}e_{312}\right),\\
\tilde{c}_{04} &= 3d_{01}(e_{103}+e_{203}) + d_{10}e_{112} - d_{-1,2}e_{212} + d_{12}e_{312}.
\end{aligned} \tag{5.199}$$

§ 5.13. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем

Процедура нормализации гамильтонианов и канонических преобразований позволила решить некоторые задачи из теории устойчивости, которые раньше не поддавались решению. Приведем некоторые из них в виде теорем.

Теорема (Арнольд — Мозер [179]). *Если в автономной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы отсутствуют резонансы до четвертого порядка включительно и в нормальной форме* (195)

$$C_{20}\lambda_2^2 - C_{11}\lambda_1\lambda_2 + C_{02}\lambda_1^2 \neq 0, \tag{5.200}$$

то положение равновесия $x = y = 0$ гамильтоновой системы (1) *устойчиво по Ляпунову.*

Замечание 1. Если в (196) $\lambda_1\lambda_2 > 0$, то устойчивость положения равновесия следует непосредственно из классической теоремы Ляпунова об устойчивости [176], в которой в качестве функции Ляпунова берется знакоопределенный интеграл $H = \mathrm{const}$.

Замечание 2. Если неравенство (200) не выполняется, то для решения задачи устойчивости решения $x = y = 0$ необходимо привлечь члены более высокого порядка в разложении функции Гамильтона, как это было сделано Маркеевым в [179].

В случае единственно возможного в двумерной гамильтоновой системе резонанса третьего порядка $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ нормальная форма имеет вид

$$K = K_2 + R_3 + \ldots, \tag{5.201}$$

$$R_3 = [A_{12}\sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + B_{12}\cos(\varphi_1 + 2\varphi_2)]\sqrt{r_1 r_2^2}, \tag{5.202}$$

$$A_{12} = a_3^{(12)}/\sqrt{2}, \qquad B_{12} = b_3^{(12)}/\sqrt{2}. \tag{5.203}$$

Теорема (А. П. Маркеев [179]). *Если в нормальной форме* (201)

$$A_{12}^2 + B_{12}^2 \neq 0, \tag{5.204}$$

то положение равновесия $x = y = 0$ неустойчиво. Если неравенство (204) *нарушено и в* (197) $C_{20} + 2C_{11} + 4C_{02} \neq 0$, *то имеет место устойчивость положения равновесия $x = y = 0$.*

В случае единственно возможного резонанса четвертого порядка $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$ нормальная форма имеет вид

$$K = K_2 + K_4 + R_4 + \ldots, \tag{5.205}$$

$$R_4 = [A_{13}\sin(\varphi_1 + 3\varphi_2) + B_{13}\cos(\varphi_1 + 3\varphi_2)]\sqrt{r_1 r_2^3}, \tag{5.206}$$

$$A_{13} = \frac{a_4^{(13)}}{2} - \frac{\tilde{a}_4^{(13)}}{8}, \qquad B_{13} = \frac{b_4^{(13)}}{2} - \frac{\tilde{b}_4^{(13)}}{8},$$

$$\widetilde{a}_4^{(13)} = 2d_{01}\left(\gamma_{103}^{312} + \gamma_{203}^{112}\right) + 2d_{12}\left(3\gamma_{312}^{103} + \gamma_{312}^{121}\right) + 2\left(d_{21} - d_{-1,2}\right)\gamma_{212}^{312}, \tag{5.207}$$

$$\widetilde{b}_4^{(13)} = 2d_{01}\left(\delta_{103}^{312} + \delta_{203}^{112}\right) + 2d_{12}\left(3\delta_{312}^{103} + \delta_{312}^{121}\right) + 2\left(d_{21} - d_{-1,2}\right)\delta_{212}^{321}.$$

Теорема (А. П. Маркеев [179]). *Если в нормальной форме* (205)

$$(C_{20} + 3C_{11} + 9C_{02})^2 < 27\left(A_{13}^2 + B_{13}^2\right), \tag{5.208}$$

то положение равновесия $x = y = 0$ неустойчиво. Если неравенство (208) *выполнено с противоположным знаком, то имеет место устойчивость по Ляпунову. В случае обращения* (208) *в равенство вопрос об устойчивости решается членами более высокого порядка.*

В случае резонанса второго порядка $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ с простыми элементарными делителями определяющей матрицы линеаризованной системы нормальная форма имеет вид (205), причем

$$\begin{aligned} R_4 = \left(A_{22}^{(31)}\sin\varphi + B_{22}^{(31)}\cos\varphi\right)\sqrt{r_1^3 r_2} &+ \\ + \left(A_{22}^{(22)}\sin 2\varphi + B_{22}^{(22)}\cos 2\varphi\right) r_1 r_2 &+ \\ + \left(A_{22}^{(31)}\sin\varphi + B_{22}^{(31)}\cos\varphi\right)\sqrt{r_1 r_2^3}, &\quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \end{aligned} \tag{5.209}$$

$$A_{22}^{(31)} = a_2^{(31)}/2 - \widetilde{a}_2^{(31)}/8, \quad B_{22}^{(31)} = b_2^{(31)}/2 - \widetilde{b}_2^{(31)}/8,$$

$$A_{22}^{(22)} = a_4^{(22)}/2 - \widetilde{a}_4^{(22)}/8, \quad B_{22}^{(22)} = b_4^{(22)}/2 - \widetilde{b}_4^{(22)}/8,$$

$$A_{22}^{(13)} = a_2^{(13)}/2 - \widetilde{a}_2^{(13)}/8, \quad B_{22}^{(13)} = b_2^{(13)}/2 - \widetilde{b}_2^{(13)}/8,$$

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_2^{(31)} &= 2d_{10}\left(\gamma_{130}^{121} + \alpha_{321}^{130} + \alpha_{230}^{221}\right) + 2d_{2,-1}\left(3\alpha_{230}^{221} - \gamma_{221}^{212}\right) + \\ &+ 2d_{12}\alpha_{312}^{121} + 2d_{-1,2}\gamma_{221}^{212} + 2d_{21}\left(3\alpha_{321}^{130} + \alpha_{321}^{112}\right) + 2d_{01}\left(\gamma_{112}^{121} + \alpha_{312}^{121}\right), \\ \widetilde{a}_4^{(22)} &= d_{10}\left(\gamma_{130}^{312} + \gamma_{230}^{212}\right) - 3d_{2,-1}\gamma_{221}^{203} + d_{21}\left(4\gamma_{321}^{121} + 3\gamma_{321}^{103}\right) - \\ &- 3d_{-1,2}\gamma_{230}^{212} + d_{12}\left(3\gamma_{130}^{312} + 4\gamma_{112}^{312}\right) + d_{01}\left(\gamma_{321}^{103} + \gamma_{221}^{203}\right), \\ \widetilde{a}_2^{(13)} &= 2d_{01}\left(\gamma_{103}^{112} + \alpha_{312}^{103} + \alpha_{203}^{212}\right) + 2d_{-1,2}\left(3\alpha_{203}^{212} - \gamma_{212}^{221}\right) + \\ &+ 2d_{21}\alpha_{321}^{112} + 2d_{2,-1}\gamma_{212}^{221} + 2d_{12}\left(3\alpha_{312}^{103} + \alpha_{312}^{121}\right) + 2d_{10}\left(\gamma_{121}^{112} + \alpha_{321}^{112}\right), \end{aligned}$$

а формулы для $\widetilde{b}$ получаются из соответствующих формул для $\widetilde{a}$ заменой $\alpha \to \beta$, $\gamma \to \delta$ с теми же индексами.

Введем обозначение $\Phi(\varphi) = K_4 + R_4|_{r_1 = r_2 = 1}$.

Теорема (А. Г. Сокольский [180]). *Если в нормальной форме* (205), (209) $\Phi(\varphi) \neq 0$ *при* $\varphi \in [0, 2\pi]$, *то положение равновесия $x = y = 0$ устойчиво по Ляпунову. Если существует такое φ^*, что $\Phi(\varphi^*) = 0$, $\Phi'(\varphi^*) \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво. Если все корни уравнения $\Phi(\varphi) = 0$ имеют четную крат-*

ность, то вопрос об устойчивости решается членами более высокого порядка.

При наличии резонанса второго порядка с непростыми элементарными делителями после нелинейной нормализующей замены $(x_s, y_s) \to (X_s, Y_s)$ получаем следующую нормальную форму [180]:

$$K = K_2 + K_4 + \ldots, \tag{5.210}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}\left(Y_1^2 + Y_2^2\right) + \omega\left(X_1Y_2 - X_2Y_1\right), \tag{5.211}$$

$$K_4 = (X_1^2 + X_2^2)\left[A\left(X_1^2 + X_2^2\right) + B\left(Y_1^2 + Y_2^2\right) + C\left(X_1Y_2 - X_2Y_1\right)\right], \tag{5.212}$$

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{8}(3h_{4000} + h_{2200} + 3h_{0400}) + \frac{1}{8\omega}[h_{3000}(2h_{1110} + 5h_{2001} + 7h_{0201}) + \\ + h_{1200}(h_{2001} + 3h_{0201}) - h_{0300}(2h_{1101} + 5h_{0210} + 7h_{2010}) - \\ - h_{2100}(h_{0210} + 3h_{2010})] + \frac{1}{16\omega^2}\left(23h_{3000}^2 + 14h_{3000}h_{1200} + \right. \\ \left. + 3h_{1200}^2 + 23h_{0300}^2 + 14h_{0300}h_{2100} + 3h_{2100}^2\right). \end{aligned} \tag{5.213}$$

Теорема (А. Г. Сокольский [180, 181]). *Если в нормальной форме (210) $A < 0$, то положение равновесия $x = y = 0$ двумерной гамильтоновой системы неустойчиво. Если $A > 0$, то имеет место устойчивость по Ляпунову. В случае $A = 0$ вопрос об устойчивости решается членами более высокого порядка.*

Наконец, при резонансе первого порядка $\omega_2 = 0$ с непростыми элементарными делителями после нелинейной нормализации получим

$$K = K^{(0)} + K^{(1)}, \tag{5.214}$$

$$K^{(0)} = \frac{\omega_1}{2}\left(X_1^2 + Y_1^2\right) + \frac{\delta Y_2^2}{2} + a_{0M}X_2^M, \tag{5.215}$$

$$K^{(1)} = \sum_{m=3}^{M}\sum_{k=1}^{[m/2]} a_{2k,m-2k}\left(X_1^2 + Y_1^2\right)^k X_2^{m-2k} + K_{M+1} + \ldots, \tag{5.216}$$

$$a_{03} = h_{0300}, \tag{5.217}$$

$$a_{04} = h_{0400} - \frac{1}{2\omega_1}\left(h_{1200}^2 + h_{0210}^2\right) - \frac{\delta h_{0201}^2}{2}. \tag{5.218}$$

Теорема (А. Г. Сокольский [182]). *Если в нормальной форме (214) $a_{0M} \neq 0$ и M нечетное или при четном M выполнено $\delta a_{0M} < 0$, то положение равновесия $x = y = 0$ неустойчиво. Если M — четное число и $\delta a_{0M} > 0$, то имеет место устойчивость по Ляпунову.*

Все приведенные в этом параграфе формулы можно получить с помощью фортранных программ, которые входят в комплекс программ нормализации двумерных канонических систем, описанный в [173]. Аналогичный комплекс программ, но для систем с тремя степенями свободы, описан в работе [174].

В работах [179, 183, 184] получены формулы для коэффициентов нормальных форм неавтономных гамильтоновых систем и выведены соответствующие условия устойчивости и неустойчивости положения равновесия, выраженные через эти коэффициенты. В этих работах показано, что решение проблемы нормализации в окрестности положения равновесия одновременно позволяет решить проблему существования, построения и исследования устойчивости малых периодических и условно-периодических движений в окрестности этого положения равновесия. В заключение отметим, что многочисленные приложения этих результатов к задачам небесной механики и космодинамики можно найти в монографии А. П. Маркеева [179] и в статьях А. Г. Сокольского и А. П. Иванова [182—184].

§ 5.14. Метод ускоренной сходимости

Всякий сходящийся ряд является асимптотическим в смысле определения Пуанкаре [12] (но не наоборот), поэтому теория гамильтоновых систем, в которой используются сходящиеся ряды, с полным правом может быть отнесена и к асимптотической теории. Здесь будут изложены новые идеи и новые результаты, связанные с использованием сходящихся рядов.

Вернемся снова к гамильтоновой системе (1) $2n$-го порядка

$$dx/dt = -\partial H/\partial y, \quad dy/dt = \partial H/\partial x$$

с автономным гамильтонианом вида

$$H(x, y) = H_0(x_1, \ldots, x_n) + \mu H_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n), \tag{5.219}$$

где $H_0(x)$ — невозмущенная часть гамильтониана, $\mu H_1(x, y)$ — его относительно малая возмущенная часть (μ — малый положительный параметр). Если обобщенные импульсы x являются позиционными переменными, а обобщенные координаты y — угловыми переменными и гамильтониан $H(x, y)$ 2π-периодичен по y в области

$$G_{2n} = \{(x, y): \|x - a\| < g, \ \|\mathrm{Im}\, y\| \leqslant \rho < 1\} \tag{5.220}$$

(a, g, ρ — фиксированные числа), то при известных условиях [5, 6] возмущенная часть гамильтониана разлагается в n-кратный ряд Фурье

$$H_1(x, y) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} h_k(x) \exp\{i(k, y)\}, \tag{5.221}$$

$$\|k\| = \sum_{s=1}^{n} |k_s|, \qquad k_s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ставится задача о нахождении точных (а не приближенных) решений гамильтоновой системы (1) в виде условно-периодических функций времени при вещественных начальных значениях $(x_0, y_0) \in G_{2n}$.

Под условно-периодическим решением системы (1) понимается такое решение, в котором позиционные переменные выражаются чисто тригонометрическими рядами вида

$$x(t) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} A_k \exp\{i(k, \omega)t\}, \tag{5.222}$$

а угловые переменные y имеют вид

$$y(t) = \omega t + \sum_{\|k\| \geqslant 0} B_k \exp\{i(k, \omega)t\}, \tag{5.223}$$

причем компоненты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ вектора частот ω являются рационально несоизмеримыми, A_k, B_k — постоянные величины, зависящие от начальных условий и параметров системы.

Методы построения формальных решений вида (222), (223) гамильтоновой системы (1) известны уже давно, однако вопрос о сходимости этих рядов в строгом математическом смысле оставался открытым. Исследования Пуанкаре [12] и более поздних математиков [112, 185, 186] показали, что ряды вида (222), вообще говоря, расходятся из-за наличия в коэффициентах A_k малых знаменателей вида $(k, \omega) \approx 0$.

Таким образом, для доказательства существования точных решений гамильтоновых систем в виде условно-периодических функций времени необходимо выяснить условия, при которых ряды (222) сходятся в классическом смысле. К. Л. Зигель [91, 185] и А. Н. Колмогоров [112, 186] выдвинули те плодотворные идеи, которые мы обсуждали в § 4.1. Применительно к гамильтоновым системам это означает:

1. Использование того факта, что все малые знаменатели (т. е. числа (k, ω)) для «большинства» по мере Лебега [187] иррациональных частот $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ удовлетворяют некоторым оценкам снизу. В частности, почти все (в смысле меры Лебега) частотные векторы ω удовлетворяют оценке

$$|(k, \omega)| \geqslant K(\omega)/\|k\|^{n+1}, \tag{5.224}$$

где n — размерность векторов ω и k, $K(\omega)$ — положительная величина, зависящая только от ω.

2. Из неравенства (224) вытекает, что существуют такие векторы частот ω, которые удовлетворяют противоположному ему неравенству

$$|(k, \omega)| < K(\omega)/\|k\|^{n+1}, \tag{5.225}$$

и именно они и порождают те малые знаменатели $(k, \omega) \approx 0$, которые «разрушают» сходимость рядов (222). Поэтому исследовать задачу о сходимости рядов вида (222) целесообразно лишь для тех частот, которые удовлетворяют оценке (224). Отсюда следует, что область сходимости рядов (222) зависит от меры этого «хорошего» множества. Эта точка зрения получила название «метрическая концепция» в теории гамильтоновых систем [9]. Она состоит в том, что изучаются свойства не всех возможных движений, а основной совокупности, соответствующих «почти всем», а не всем начальным условиям.

3. Сами решения гамильтоновых систем следует строить не в виде рядов по степеням малого параметра (скорость сходимости таких рядов есть скорость сходимости геометрической прогрессии, т. е. s-й член ряда есть величина $O(\mu^s)$), а с помощью итерационных методов типа метода Ньютона [115], основанных на последовательности замен переменных, обладающей ускоренной сходимостью (иногда s-е приближение имеет порядок $O(\mu^{2^s})$).

На основе высказанных идей В. И. Арнольдом [86], Ю. Мозером [120, 121] и другими математиками был разработан метод построения точных решений систем (1) с гамильтонианом (219), (221). В его основу положена операция перехода от канонических уравнений (1) с одним гамильтонианом к аналогичным уравнениям с другим гамильтонианом при помощи специально выбираемого канонического преобразования, и такую цепочку преобразований следует осуществлять бесконечное число раз.

Более конкретно рассмотрим так называемый невырожденный случай, когда гессиан

$$\det(\partial^2 H_0/\partial x^2) \neq 0 \tag{5.226}$$

в области G_{2n}.

Первый шаг. Выделим сначала усредненную по y часть «малой» функции $\mu H_1(x, y)$ (т. е. выделим «вековую» часть функции μH_1) по формуле

$$\overline{H}_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} H_1(x, y)\, dy_1 \dots dy_n \tag{5.227}$$

и представим первоначальный гамильтониан в виде

$$H(x, y) = H_0(x) + \mu\overline{H}_1(x) + \mu\widetilde{H}_1(x, y), \tag{5.228}$$

где $\widetilde{H}_1(x, y)$ — чисто периодическая по y часть функции $H_1(x, y)$. Так как в общем случае количество членов в разложении (5.221) бесконечно, представим $\widetilde{H}_1(x, y)$ в виде суммы

$$\widetilde{H}_1(x, y) = [\widetilde{H}_1(x, y)]_{N_0} + R_{N_0}\widetilde{H}_1(x, y), \tag{5.229}$$

где

$$[\widetilde{H}_1(x, y)]_{N_0} = \sum_{1 \leqslant \|k\| < N_0} h_k(x) \exp\{i(k, y)\}, \tag{5.230}$$

и

$$R_{N_0}\widetilde{H}_1(x, y) = \sum_{\|k\| \geqslant N_0} h_k(x) \exp\{i(k, y)\}, \tag{5.231}$$

N_0 — некоторое положительное целое число. О выборе N_0 будет сказано ниже, но во всяком случае N_0 должно быть достаточно большим, чтобы остаточный член $R_{N_0}\widetilde{H}_1$ имел второй порядок малости по сравнению с H_1. Тогда $H(x, y)$ запишем в виде

$$H(x, y) = H_0^{(1)}(x) + \mu\left[\widetilde{H}_1(x, y)\right]_{N_0} + \mu R_{N_0}\widetilde{H}_1(x, y), \tag{5.232}$$

где

$$H_0^{(1)}(x) = H_0(x) + \mu\overline{H}_1(x). \tag{5.233}$$

Введем вместо x, y новые канонические переменные $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$ по формулам

$$x = X^{(1)} + \partial S^{(1)}/\partial y, \quad Y^{(1)} = y + \partial S^{(1)}/\partial X^{(1)} \tag{5.234}$$

(где $S^{(1)}(X^{(1)}, y)$ — производящая функция канонического преобразования $(x, y) \to (X^{(1)}, Y^{(1)})$), которые преобразовывают первоначальную гамильтонову систему (1) в систему

$$dX^{(1)}/dt = -\partial H^{(1)}/\partial Y^{(1)}, \quad dY^{(1)}/dt = \partial H^{(1)}/\partial X^{(1)}. \tag{5.235}$$

Новый гамильтониан $H^{(1)}(X^{(1)}, Y^{(1)})$ получается из прежнего $H(x, y)$ после замены x и y их выражениями через $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$, т. е.

$$H^{(1)}(X^{(1)}, Y^{(1)}) = H(x(X^{(1)}, Y^{(1)}), y(X^{(1)}, Y^{(1)})). \tag{5.236}$$

Если положить

$$S^{(1)}(X^{(1)}, y) = \sum_{1 \leqslant \|k\| < N_0} S_k^{(1)}(X^{(1)}) \exp\{i(k, y)\}, \tag{5.237}$$

$$S_k^{(1)}(X^{(1)}) = -h_k(X^{(1)})\left(k, \partial H_0^{(1)}(X^{(1)})/\partial X^{(1)}\right)^{-1}, \tag{5.238}$$

это равносильно операции уничтожения (или обнуления) в гамильтониане чисто тригонометрических членов гамильтониана (230), в которых прежние импульсы x заменены новыми $X^{(1)}$. Действительно, легко показать, что функция (237) является одним из решений уравнения в частных производных

$$\left(\partial H_0^{(1)}/\partial X^{(1)}, \partial S^{(1)}/\partial y\right) + \left[\widetilde{H}_1(X^{(1)}, y)\right]_{N_0} = 0. \tag{5.239}$$

Такой алгоритм построения канонического преобразования на первом шаге позволяет получить такую гамильтонову систему (235), в которой

$$H^{(1)}(X^{(1)}, Y^{(1)}) = H_0^{(1)}(X^{(1)}) + \mu H_1^{(1)}(X^{(1)}, Y^{(1)}), \tag{5.240}$$

причем «малая» часть $\mu H_1^{(1)}$ заведомо удовлетворяет оценке

$$|\mu H_1^{(1)}| < \mu_1 < \mu. \tag{5.241}$$

Величина μ_1 существенно зависит от выбора нами целого числа N_0, т. е. от того, какое количество тригонометрических членов гамильтониане мы желаем уничтожить на первом шаге. В принципе можно написать, что

$$\mu_1 = O(\mu^s), \qquad s > 1. \tag{5.242}$$

Оценки, выполненные В. И. Арнольдом [86], показали, что число N_0 нужно выбрать таким образом, чтобы

$$s \approx 2. \tag{5.243}$$

После выполнения первого шага мы можем построить первое приближение к искомому точному условно-периодическому решению системы (1). Для этого следует в преобразованной системе (235) отбросить возмущающую часть гамильтониана $\mu H_1^{(1)}(X^{(1)}, Y^{(1)})$ и вместо (235) решать гамильтонову систему

$$d\overline{X}^{(1)}/dt = -\partial H_0^{(1)}/\partial Y^{(1)} = 0, \quad d\overline{Y}^{(1)}/dt = \partial H_0^{(1)}/\partial \overline{X}^{(1)}. \tag{5.244}$$

Она интегрируется непосредственно:

$$\overline{X}^{(1)} = X_0^{(1)} = \text{const}, \quad \overline{Y}^{(1)}(t) = \omega^{(1)}t + Y_0^{(1)}, \tag{5.245}$$

где $X_0^{(1)}$, $Y_0^{(1)}$ — начальные значения для системы (2.44), связанные с x_0, y_0 обратным преобразованием; новые частоты имеют вид

$$\omega^{(1)} = \partial H_0^{(1)}/\partial \overline{X}^{(1)}\big|_{\overline{X}^{(1)}=X_0^{(1)}}. \tag{5.246}$$

Возвращаясь к формулам (234), дающим каноническое преобразование, и подставляя в них решение (245), (246), найдем первое приближение $x^{(1)}(t)$, $y^{(1)}(t)$ решения первоначальной гамильтоновой системы (1). Явные формулы для $x^{(1)}(t)$, $y^{(1)}(t)$ можно найти в [8, 125]. Если мы не ограничиваемся первым приближением, то следует применить к системе (235) каноническое преобразование $(X^{(1)}, Y^{(1)}) \to (X^{(2)}, Y^{(2)})$, аналогичное преобразованию $(x, y) \to (X^{(1)}, Y^{(1)})$, т. е. выполнить

Второй шаг. Распишем гамильтониан, как и на первом шаге:

$$H_1^{(1)}(X^{(1)}, Y^{(1)}) = \overline{H}_1^{(1)}(X^{(1)}) + [\widetilde{H}_1^{(1)}(X^{(1)}, Y^{(1)})]_{N_1} + R_{N_1}H_1^{(1)}, \tag{5.247}$$

где $\overline{H}_1^{(1)}$ — «вековая» часть, $[\widetilde{H}_1^{(1)}]_{N_1}$ — частная сумма, содержащая гармоники не выше N_1, $R_{N_1}H_1^{(1)}$ — остаточный ряд. Тогда гамильтониан $H^{(1)}$ может быть представлен формулами

$$H^{(1)} = H_0^{(2)}(X^{(1)}) + [\widetilde{H}_1^{(1)}(X^{(1)}, Y^{(1)})]_{N_1} + R_{N_1}H_1^{(1)}, \tag{5.248}$$

$$H_0^{(2)}(X^{(1)}) = H_0^{(1)}(X^{(1)}) + \overline{H}_1^{(1)}(X^{(1)}). \tag{5.249}$$

Введем новые канонические переменные $X^{(2)}$, $Y^{(2)}$ по формулам

$$X^{(1)} = X^{(2)} + \partial S^{(2)}/\partial Y^{(1)}, \quad Y^{(2)} = Y^{(1)} + \partial S^{(2)}/\partial X^{(2)}. \tag{5.250}$$

Если в качестве производящей функции взять

$$S^{(2)}\left(X^{(2)}, Y^{(1)}\right) = \sum_{1 \leqslant \|k\| < N_1} S_k^{(2)}\left(X^{(2)}\right) \exp\left\{i\left(k, Y^{(1)}\right)\right\} \tag{5.251}$$

с коэффициентами

$$S_k^{(2)} = -\frac{h_k^{(1)}\left(X^{(2)}\right)}{\left(k, \partial H_0^{(2)}\left(X^{(2)}\right)/\partial X^{(2)}\right)}, \tag{5.252}$$

это гарантирует «уничтожение» в преобразованном гамильтониане членов $\left[\widetilde{H}_1^{(1)}\right]_{N_1}$. Действительно, производящая функция (251) является решением уравнения в частных производных

$$\left(\frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial X^{(2)}}, \frac{\partial S^{(2)}}{\partial Y^{(1)}}\right) + \left[\widetilde{H}_1^{(1)}\left(X^{(2)}, Y^{(1)}\right)\right]_{N_1} = 0. \tag{5.253}$$

На втором шаге каноническая система принимает вид

$$dX^{(2)}/dt = -\partial H^{(2)}/\partial Y^{(2)}, \quad dY^{(2)}/dt = \partial H^{(2)}/\partial X^{(2)}, \tag{5.254}$$

где гамильтониан дается формулами

$$H^{(2)}\left(X^{(2)}, Y^{(2)}\right) = H_0^{(2)}\left(X^{(2)}\right) + \mu H_1^{(2)}\left(X^{(2)}, Y^{(2)}\right), \tag{5.255}$$

$$H_1^{(2)} = \sum_{\|k\|>0} h_k^{(2)}\left(X^{(2)}\right) \exp\left\{i\left(k, Y^{(2)}\right)\right\}. \tag{5.256}$$

Существенной является оценка [117, 185]

$$\left|\mu H_1^{(2)}\right| < \mu_2 < \mu_1 < \mu, \tag{5.257}$$

причем если $\mu_1 = O(\mu^s)$, то

$$\mu_2 = O\left(\mu_1^s\right). \tag{5.258}$$

Если $s = 2$, то $\mu_1 \approx \mu^2$, а $\mu_2 \approx \mu^4$.

Отсюда следует, что на m-м шаге «малая функция» $\mu H^{(m)}$ будет иметь порядок $O\left(\mu^{2^m}\right)$, т. е. таким образом построенная последовательность канонических преобразований

$$(x, y) \to \left(X^{(1)}, Y^{(1)}\right) \to \ldots \to \left(X^{(m)}, Y^{(m)}\right) \to \ldots \tag{5.259}$$

обладает ускоренной сходимостью [115].

Вернемся ко второму приближению. Чтобы его получить, следует пренебречь в дифференциальных уравнениях возмущенной частью гамильтониана $H^{(2)}\left(X^{(2)}, Y^{(2)}\right)$, т. е. функцией $\mu H_1^{(2)}\left(X^{(2)}, Y^{(2)}\right)$; тогда

$$d\overline{X}^{(2)}/dt = -\partial H_0^{(2)}\left(\overline{X}^{(2)}\right)/\partial\overline{Y}^{(2)} = 0, \quad d\overline{Y}^{(2)}/dt = \partial H_0^{(2)}\left(\overline{X}^{(2)}\right)/\partial\overline{X}^{(2)}. \tag{5.260}$$

Интегрирование этих уравнений с прежними начальными условиями дает второе приближение к точному условно-периодическому решению первоначальной системы

$$\overline{X}^{(2)} = X_0^{(2)} = \text{const}, \quad \overline{Y}^{(2)}(t) = \omega^{(2)}t + Y_0^{(2)} \tag{5.261}$$

с частотами

$$\omega^{(2)} = \partial H_0^{(2)}\left(X^{(2)}\right)/\partial X^{(2)}\big|_{X^{(2)}=X_0^{(2)}}. \tag{5.262}$$

Описанный выше процесс преобразований можно продолжать неограниченно. При любом $m = 1, 2, 3, \ldots$ для m-го приближения к искомому условно-периодическому решению получаем формулы [8, 125]

$$\begin{gathered} x^{(m)}(t) = X_0^{(m)} + \sum_{\|k\|\geqslant 0} f_{xk}^{(m)}\left(X_0^{(m)}\right)\exp\left\{i\left(k, \omega^{(m)}\right)t + i\left(k, Y_0^{(m)}\right)\right\}, \\ y^{(m)}(t) = \\ = \omega^{(m)}t + Y_0^{(m)} + \sum_{\|k\|\geqslant 0} f_{yk}^{(m)}\left(X_0^{(m)}\right)\exp\left\{i\left(k, \omega^{(m)}\right)t + i\left(k, Y_0^{(m)}\right)\right\}, \end{gathered} \tag{5.263}$$

где $f_{xk}^{(m)}$, $f_{yk}^{(m)}$ — аналитические функции $X_0^{(m)}$, а частоты $\omega^{(m)}$ выражаются через невозмущенную часть гамильтониана m-го приближения $H_0^{(m)}$ с помощью формулы

$$\omega^{(m)} = \partial H_0^{(m)}\left(X^{(m)}\right)/\partial X^{(m)}\big|_{X^{(m)}=X_0^{(m)}}. \tag{5.264}$$

Величины $X_0^{(m)}$, $Y_0^{(m)}$ связаны с начальными значениями искомых функций x_0, y_0 цепочкой формул, приведенных в [8, с. 191, 194]. Из формул (263) видно, что каждое приближение к точному условно-периодическому решению само является условно-периодической функцией и представляется в общем случае бесконечными рядами.

Принципиальным является вопрос о сходимости последовательности канонических преобразований. В классической постановке (применительно к рядам, представляющим решение, а не к последовательностям преобразований) этот вопрос рассматривался Пуанкаре [12], который получил отрицательный результат. Другие авторы фактически уточняли результаты Пуанкаре. В «метрической концепции» оказалось возможным доказать сходимость последовательности канонических преобразований. Основные результаты в этом направлении получили В. И. Арнольд [86] для гамильтоновых систем и Ю. Мозер [121] для уравнений в частных производных эллиптического вида. Не имея возможности излагать в полном объеме теоремы указанных авторов, рассмотрим два существенных момента в вопросе о сходимости канонических преобразований (259).

1. Выбор чисел N_0, N_1, ..., N_m, ..., определяющих частные суммы и остаточные ряды, на которые разбивается каждый из

гамильтонианов

$$H(x, y),\ H^{(1)}(X^{(1)}, Y^{(1)}), \ldots, H^{(m)}(X^{(m)}, Y^{(m)}), \ldots$$

при применении указанных выше канонических преобразований. Согласно развитой теории [8], если

$$|\mu H_1(x, y)| < C\mu, \qquad (5.265)$$

то все числа N_m следует определять по формуле [8]

$$N_m = (C_m\mu)^{-1/(4nT)} \ln \frac{1}{C_m\mu}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (5.266)$$

где

$$C_0 = C, \quad C_r = C_{r-1}^{1+\alpha}, \quad r = 1, 2, \ldots, \quad T \geqslant (4n+12)/(1-\alpha), \qquad (5.267)$$

$$0 < \alpha < 1. \qquad (5.268)$$

При таком выборе чисел N_m^* можно доказать [8], что если μ достаточно мало и если начальные условия x_0, y_0 выбраны благоприятным образом, то приближения $x^{(m)}(t)$, $y^{(m)}(t)$ сходятся при $m \to \infty$ к точному решению первоначальных уравнений.

2. «Благоприятные значения» x_0, y_0 принадлежат некоторой подобласти $G_{2n}^* \subset G_{2n}$. Подобласть G_{2n}^* строится путем последовательного исключения из первоначальной области G_{2n}, так сказать, «плохих» точек (x, y). Например, на первом шаге при замене $(x, y) \to (X^{(1)}, Y^{(1)})$ исключаются из области G_{2n} начальные условия x_0, y_0, которые соответствуют таким точкам $X^{(1)}$ (вместе с их достаточно малыми окрестностями), при которых знаменатели $\left(k, \partial H_0^{(1)}/\partial X^{(1)}\right)$ в производящей функции $S^{(1)}(X^{(1)}, y)$ (237) меньше некоторой величины, пропорциональной $\|k\|^{-n-1}$ (см. оценку (225)).

На втором шаге, т. е. при осуществлении замены $(X^{(1)}, Y^{(1)}) \to (X^{(2)}, Y^{(2)})$, исключаются начальные условия x_0, y_0, которые соответствуют таким точкам $X^{(2)}$ (вместе с их достаточно малыми окрестностями), при которых знаменатели $(k, \partial H^{(2)}/\partial X^{(2)})$ в производящей функции второго приближения $S^{(2)}(X^{(2)}, Y^{(1)})$ также меньше аналогичной величины, пропорциональной $\|k\|^{-n-1}$.

Если подобная процедура повторяется бесконечное число раз, то следует оценить меру множества «хороших» точек, которые могут дать сходящиеся ряды, и меру множества «плохих» точек и их окрестностей, которые препятствуют сходимости рядов.

Оценки В. И. Арнольда [86] показывают, что мера подобласти G_{2n}^*, состоящей из «хороших» точек, отличаются от меры области G_{2n} на величину $O(\mu)$, т. е. почти равна мере области G_{2n} (полной мере). Отсюда следует, что мера множества «плохих» точек равна $O(\mu)$.

Описанные исходные предпосылки позволили доказать, что последовательность канонических преобразований (и, следовательно, ряды (263), представляющие решение гамильтоновой системы (1)) сходится, если начальные условия $(x_0, y_0) \in G^*_{2n}$.

Подробные оценки, относящиеся к доказательству сходимости канонических преобразований, можно найти в [8, 86].

В заключение выскажем одну рекомендацию: выбор чисел N_m следует осуществлять не только с учетом формул (266)—(268), но и таким образом, чтобы остаточные члены $R_{N_m} H_1^{(m)}$ оставались за пределами выбранной заранее точности вычислений, тогда их можно просто отбрасывать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шварц Л. Анализ, т. I.— М.: Мир, 1972.
2. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1965.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.
4. Лурье А. И. Аналитическая механика.— М.: Изд-во АН СССР, 1961.
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. II.— М.: Мир, 1965.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III.— М.: Наука, 1966.
7. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике/Под ред. Г. Н. Дубошина.— М.: Наука, 1976.
8. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике.— М.: Наука, 1971.
9. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
10. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения.— М.: Гостехиздат, 1955.
11. Кузнецов Б. Г. Беседы о теории относительности.— М.: Изд-во АН СССР, 1963.
12. Пуанкаре А. Избранные труды, т. I.— М.: Наука, 1971.
13. Вазов В. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.
14. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М.: Наука, 1981.
15. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1976.
16. Ляпунов А. М. Собрание сочинений, т. I.— М.: Изд-во АН СССР, 1954.
17. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем.— М.: Наука, 1979.
18. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1968.
19. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных.— М.: Наука, 1966.
20. Волосов В. М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.— УМН, 1962, 17, вып. 6, с. 3—126.
21. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике.— М.: Наука, 1978.
22. Delaunay C. Theorie du mouvement de la Lune, 1, 1860; 2, 1867, Memoires de l'Academie des Sciences de la France, №№ 28, 29.
23. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем.— М.: Изд-во МГУ, 1971.
24. Гребеников Е. А. Некоторые оценки метода осреднения для многочастотных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1968, 4, вып. 3, с. 459—473.
25. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний.— Киев: Изд-во АН УССР, 1934, с. 3—26.

26. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику.— Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
27. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике.— Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
28. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике. Киев: Сб. Ин-та строит. мех. АН УССР, 1950, вып. 14, с. 9—34.
29. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Изд-во АН СССР, 1963.
30. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н. Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле.— Укр. мат. ж., 1955, вып. VII, с. 201—221.
31. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев: Наукова думка, 1969.
32. Гихман И. И. По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова.— Укр. мат. ж., 1952, 4, № 2, с. 215—219.
33. Демидович Б. П. Об одном обобщении принципа усреднения Н. Н. Боголюбова.— ДАН СССР, 1954, 96, № 4, с. 693—694.
34. Гребеников Е. А. Возможность применения методов осреднения для качественных исследований в небесной механике.— Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, 1966, 35, с. 158—172.
35. Коломиец В. Г. О принципе усреднения для стохастических систем с последействием.— В кн.: Тр. V Международной конференции по нелинейным колебаниям. М.: Ин-т мат. АН УССР, 1970, с. 171—176.
36. Красносельский М. А., Крейн С. Г. О принципе усреднения в нелинейной механике.— УМН, 1955, 10, № 3 (65), с. 147—152.
37. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наукова думка, 1971.
38. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М.: Наука, 1964.
39. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Лекции по методу интегральных многообразий.— Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1968.
40. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики.— М.: Наука, 1969.
41. Самойленко А. М. Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.— В кн.: Приближенные методы решения дифференциальных уравнений.— Киев: Изд-во АН УССР, 1963, с. 90—95.
42. Самойленко А. М. Метод усреднения в системах с толчками.— В кн.: Математическая физика.— Киев: Наукова думка, 1971, вып. 9, с. 63—96.
43. Филатов А. Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений.— Ташкент: Изд-во ФАН АН УзССР, 1974.
44. Филатов А. Н. Усреднение дифференциально-операторных уравнений.— In: VII Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen, Band I, i, Berlin: Akademie-Verlag, 1977.
45. Diliberto S. P. New Results on Periodic Surface and the Averaging Principle. Proceedings United States — Japan Seminar on Differential and Functional Equations, 1967.
46. Вульпе И. М., Гребеников Е. А., Лика Д. К. Об усреднении систем на интервале времени длины порядка $O(1/\mu^\alpha)$.— Кишинев: Изв. АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1971, № 3, с. 7—12.
47. Моргунов Б. И. Расчет вращательных режимов некоторых негамильтоновых систем.— Вестн. МГУ. Сер. III. Физика, астрономия, 1965, № 4, с. 83—86.
48. Медведев Г. И., Моргунов Б. И. Об асимптотическом решении методом усреднения некоторых систем дифференциальных уравнений

с запаздыванием.— Вестн. МГУ. Сер. III. Физика, астрономия, 1968, № 2, с. 109—111.
49. Черноусько Ф. Л. О резонансе в существенно нелинейной системе.— ЖВМ и МФ, 1963, 3, № 1, с. 131—144.
50. Моргунов Б. И. Полный расчет второго приближения для вращательного движения.— Вестн. МГУ. Сер. III. Физика, астрономия, 1965, № 4, с. 56—65.
51. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1971.
52. Арнольд В. И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы.— ДАН СССР, 1965, 161, № 1, с. 9—12.
53. Нейштадт А. И. О точности сохранения адиабатических инвариантов.— ПММ, 1981, 45, вып. 1, с. 80—87.
54. Нейштадт А. И. Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений.— ПММ, 1981, 45, вып. 6, с. 1016—1025.
55. Попова Н. И. Обоснование и оценки погрешности некоторых схем усреднения для резонансных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Автореф. канд. дисс.— М.: Изд-во МГУ, 1981.— 14 с.
56. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Т., Дубошин Г. Н., Рябов Ю. А., Орлов А. А. Некоторые сильно возмущенные задачи нелинейной механики. В кн.: Проблемы аналитической механики, теории устойчивости и управления. М.: Наука, 1975, с. 39—46.
57. Ван-дер-Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний.— М.: Связьиздат, 1935.
58. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.
59. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем.— М.: Наука, 1960.
60. Попов Е. П. О малом параметре в методе гармонической линеаризации.— Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1955, № 1.
61. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье.— М.: ИЛ, 1953.
62. Каудерер Г. Нелинейная механика.— М.: ИЛ, 1961.
63. Дородницын А. А. Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля.— ПММ, 1947, 11, № 3, с. 313—328.
64. Рябов Ю. А., Момова К. Г. Уравнение на Ван-дер-Поль сье закьпяващ аргумент.— София: Изв. на ВМИ Ленин, 1975, XXXIV, кн. 8, с. 83—88.
65. Рябов Ю. А. Об оценке области применимости метода малого параметра в задачах теории нелинейных колебаний.— Инж. журн. АН СССР, 1961, вып. 3, с. 3—21.
66. Рябов Ю. А. Оценка радиуса сходимости для разложений по степеням параметра и алгоритмы для построения функций Матье.— Дифференц. уравнения, 1979, 15, № 11, с. 1993—2003.
67. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка.— Минск: Изд-во БГУ им. Ленина, 1982.
68. Лика Д. К., Рябов Ю. А. Методы итерации и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний.— Кишинев: Штиинца, 1974.
69. Найфэ А. Х. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.
70. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике.— Киев: Сб. Ин-та строит. мех. АН УССР, 1950, вып. 14, с. 9—34.
71. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости систем при помощи вибраций.— ДАН СССР, 1956, 111, № 3, с. 371—376.
72. Лыкова О. Б. О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности изолированного стационарного решения.— ДАН СССР, 1957, 115, с. 447—449.

73. Heil P., Chrzanowski P. A new determination of the constant of gravitation.— J. of Research National Bureau of Standart I, USA, 1942, vol. 29 (2), p. 1—31.
74. The constant of gravitation, Ed. by L. Stegena and M. Sagitov, Lorand Eötvos University, Distribution, Akademiai Kiadö, Budapest, 1979, 255 p.
75. Сагитов М. У. Постоянная тяготения, масса и средняя плотность Земли.— М.: Наука, 1969.
76. Калинников И. И., Колосницын Н. И. К теории горизонтальных крутильных весов с шестью степенями свободы.— В кн.: Вопросы стандартизации, метрологии и техники точных измерений.— М.: Госстандарт, 1973, с. 219—224.
77. Станюкович К. П. Гравитационное поле и элементарные частицы.— М.: Наука, 1965.
78. Милюков В. К. Теория движения крутильной системы в неоднородном гравитационном поле под воздействием случайных помех.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Энергоиздат, 1981, вып. 12, с. 128—140.
79. Сагитов М. У., Милюков В. К., Монахов Е. А. и др. Новое определение кавендишевой гравитационной постоянной.— ДАН СССР, 1979, 245, № 3, с. 567—569.
80. Пугачев В. С. Теория случайных функций.— М.: Физматгиз, 1962.
81. Вентцель Е. С. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1969.
82. Приливы и резонансы в Солнечной системе/Под ред. В. Н. Жаркова.— М.: Мир, 1975.
83. Синг Дж. Л. Классическая динамика.— М.: Физматгиз, 1963.
84. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных.— Киев: Вища школа, 1976.
85. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах.— М.: Мир, 1973.
86. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике.— УМН, 1963, 18, № 6, с. 92—191.
87. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.— М.: Гостехиздат, 1947.
88. Lindstedt A. Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungtheorie.— St. Petersburg. Abh. K. Akad. Wiss., 1882, 31, N 4.
89. Левитан Б. М. Почти-периодические функции.— М.: Гостехиздат, 1953.
90. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений.— ЖЭТФ, 1934, № 4, с. 117—122.
91. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике.— М.: ИЛ, 1959.
92. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс.— М.: Физматгиз, 1961.
93. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных.— Мат. сб., 31, № 3, 1952, с. 575—586.
94. Мищенко Е. Ф. Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 21, № 5, 1957, с. 627—654.
95. Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 21, № 5, 1957, с. 605—626.
96. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 23, № 5, 1959, с. 643—660.
97. Аносов Д. В. Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 24, № 5, 1960, с. 721—742.

98. Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— ВИНИТИ. Итоги науки. Математика. Матем. анализ, 1967, с. 5—73.
99. Розов Н. Х. К асимптотической теории релаксационных колебаний в системах с одной степенью свободы. II. Вычисление периода предельного цикла.— М.: Вестн. МГУ. Сер. мат. и механ., 1964, № 3, с. 56—65.
100. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.
101. Иманалиев М. И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем.— Фрунзе: Илим, 1972.
102. Касымов К. А. Асимптотическое поведение решений задачи Коши с начальным скачком для системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производной.— В кн.: Уравнения математической физики и функциональный анализ. Алма-Ата: Наука, 1966, с. 16—24.
103. Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных.— Изв. АН СССР, Сер. мат., 1957, 21, с. 605—626.
104. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.— М.: Наука, 1975.
105. Мосеенков Б. И. Исследование нестационарных одночастотных режимов колебаний в системах с распределенными параметрами.— В кн.: Труды Межд. симпозиума по нелин. колебаниям. Киев: Изд-во АН УССР, 1963, 3, с. 286—304.
106. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы.— М.: Наука, 1975.
107. Leverrier U. J. Annales de l'Observatoire de Paris.— Paris: 1, 1866; 2, 1867.
108. Лагранж Ж. Аналитическая механика, т. 1, 2.— М.— Л.: Гостехиздат, 1950.
109. Tisserand F. Traite de mecanique celeste — Paris, I—IV, p. 1889—1902.
110. Newcomb S. Tables of the four inner planets, Astron. Papers, 6, № 1—4, p. 1895—1898.
111. Ferraz Mello Sylvio, Sur la methode de von Zeipel.— Mem. Soc. astr. ital., 1966, 37, № 2.
112. Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— ДАН СССР, 1954, 98, № 4.
113. Колмогоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика. Международный математический конгресс в Амстердаме.— М.: Физматгиз, 1961.
114. Хинчин А. Я. Цепные дроби.— М.: Физматгиз, 1961.
115. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах.— М.: Физматгиз, 1959.
116. Newcomb S. General integrals of planetary motions.— Washington: Smithsonian Contributions to Knowledge, 1874.
117. Арнольд В. И. Малые знаменатели, I. Об отображении окружности на себя.— Изв. АН СССР, 1961. Сер. мат., 25, № 1, с. 3—65.
118. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— УМН, 1963, 18, вып. 5, с. 13—39.
119. Нехорошев Н. И. О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым.— Функциональный анализ, 1971, 5, № 4, с. 82—83.
120. Moser J. A rapidly convergent iteration method and nonlinear differential equations, II, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1966, 20, p. 3.
121. Moser J. Convergent series expansions for quasiperiodic motions: Math. Annalen, 1967.
122. Шевалле К. Теория групп Ли, т. 1.— М.: ИЛ, 1948.

123. Fatou P. Sur le mouvement d'un point materiel dans un champ de gravitation fixe.— Acta astronomica. Ser. a, 1931, 2, p. 101—164.
124. Моисеев Н. Д. О некоторых основных упрощенных схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трех точек.— Уч. зап. МГУ, 1945, вып. 96.
125. Гребеников Е. А., Журавлев С. Г., Рябов Ю. А. Условно-периодические решения канонических систем дифференциальных уравнений при остром резонансе.— М.: Препринт ИТЭФ-23, 1976.
126. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию.— М.: Наука, 1968.
127. Приходько В. А. Теория движения астероидов группы Минерва. Канд. диссерт.— М.: Изд-во МГУ, 1974.
128. Приходько В. А. Построение явных решений задачи трех тел методом полуаналитического программирования.— М.: Препринт ИТЭФ, № 60, 1973, 35 с.
129. Иванов В. А., Киоса М. Н., Миронов С. В., Приходько В. А. Использование ЭВМ в процедуре обращения первых интегралов дифференциальных уравнений ограниченной задачи трех тел.— В кн.: Вычислительные методы и программирование, т. 37. М.: Изд-во МГУ, 1982, с. 29—56.
130. Караганчу В. Х. Построение аналитической теории движения малых планет семейства Гестии. Канд. диссерт., ГАИШ — МГУ, 1970, 131 с.
131. Белоусова О. А., Исаева Ф. И., Султанов Г. Ф., Шапошникова Т. М. Построение на ЭВМ промежуточных орбит астероидов семейства Гекубы.— Баку: Изв. АН АзССР, 1975, № 7.
132. Гребеников Е. А., Миронов С. В., Приходько В. А. Применение ЭВМ БЭСМ-6 для построения промежуточных орбит резонансных астероидов семейства Минервы.— М.: Астр. журн., 1973, № 50, вып. 6.
133. Hearn A. C. Reduce-2, User's manual, Salt Lake City, University of Utah, Utah, 84112, USA, 1973.
134. Тарасевич С. В. УПП — универсальный пуассоновский процессор. Алгоритмы небесной механики.— Л.: Препр. ИТА АН СССР, № 27.
135. Эфемериды малых планет на 1972 год.— Л.: Наука, 1971.
136. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных.— Киев: Вища школа, 1976.
137. Мосеенков Б. И. Асимптотика волновых решений эллиптических уравнений с переменными коэффициентами.— В сб.: Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1975, с. 93—100.
138. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных.— Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1968.
139. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1977.
140. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1971.
141. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов.— М.: Наука, 1972.
142. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости.— М.: Наука, 1970.
143. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.— Ташкент: ФАН, 1971.
144. Моргунов Б. И. О колебаниях длинной вязко-упругой пластинки.— Тр. МИЭМ, механика, 1974, вып. 34, с. 3—27.
145. Гребеников Е. А., Тыныcбаев Б. Построение и решение стандартных систем дифференциальных уравнений, описывающих колебания длинной вязко-упругой пластинки.— М.: Препр. ИТЭФ-39, 1978, 17 с.

146. Ларионов Г. С., А. А. Ильюшин, А. Н. Филатов. К усреднению в системах нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1969, 188, № 1, с. 49—52.
147. Годунов С. К. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1971.
148. Миронов С. В. Асимптотическая теория движения нерезонансных астероидов.— Канд. дисс., МГУ — ГАИШ, 1978.
149. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений.— М.: Физматгиз, 1962.
150. Lagrange J. L. Recherches sur la maniere de former des tables des planetes d'apres les seules observations.— Paris: Oeurves, 1873, v. VI, p. 507—627.
151. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа.— М.: Физматгиз, 1961.
152. Бахвалов Н. С. Численные методы, т. I.— М.: Наука, 1973.
153. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. I.— М.: Наука, 1966.
154. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2.— М.: Наука, 1962.
155. Ryabov Ju. A. The method for construction of semianalytical periodic and quasiperiodic solution in the theory of nonlinear oscillations by means of electronic computers.— Proceed. of 4 Conf. on Nonlinear Oscillations, Prague, 1968, p. 231—236.
156. Рябов Ю. А., Толмачев И. Л. Выполнение преобразования Крылова — Боголюбова для квазилинейных дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ.— М.: Сб. научных работ Ун-та дружбы народов, 1970, вып. 7, с. 100—104.
157. Рябов Ю. А. Оценка радиуса сходимости для разложений по степеням малого параметра и алгоритмы для построения функций Матье.— Дифференц. уравнения, 1979, 15, № 11, с. 1993—2003.
158. Джакалья Г. Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем.— М.: Наука, 1979.
159. Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения.— М.: Наука, 1968.
160. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики.— М.: Наука, 1967.
161. Birkhoff G. D. Collected Mathematical Papers.— Amer. Math. Soc., 1959, 3.
162. Биркгоф Дж. Динамические системы.— М.— Л.: Гостехиздат, 1941.
163. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике.— М.: Наука, 1966.
164. Субботин М. Ф. Курс небесной механики, т. 2.— М.— Л.: ОНТИ, 1937.
165. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика.— М.: ОНТИ, 1937.
166. Крускал И. Адиабатические инварианты.— М.: ИЛ, 1962.
167. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы.— М.: Наука, 1964.
168. Hori G. I. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables.— J. Japan Astron. Soc., 1966, 18, № 4, p. 287—296.
169. Deprit A. Canonical transformation depending on a small parameter.— Celest. Mech., 1969, I, № 1, p. 12—30.
170. Campbell J. A., Jefferis W. H. Equivalence of the perturbation theories of Hori and Deprit.— Celest. Mech., 1970, 2, № 4, p. 467—473.
171. Henrard J., Roels J. Equivalence for Lie transforms.— Celest. Mech., 1974, 10, № 4, p. 497—512.
172. Маркеев А. П., Сокольский А. Г. Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем.— М.: Препр. ИПМ АН СССР, 1976, № 31, 61 с.

173. Сокольский А. Г., Хованский С. А. Вычислительный алгоритм нормализации двумерных канонических систем.— М.: МАИ, 1981, с. 1—40. Деп. в ВИНИТИ 4.08.81. № 3883—81.
174. Сокольский А. Г., Хованский С. А. Программы нормализации гамильтоновых систем с тремя степенями свободы.— М.: МАИ, 1981, с. 1—10. Деп. в ВИНИТИ 4.08.81, № 3883—81.
175. Mersman W. A. A new algorithm for the Lie transformation. Celest. Mech., 1970, 3, № 1, p. 81—89.
176. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения.— М.: Наука, 1966.
177. Брумберг В. А. Аналитические алгоритмы небесной механики.— М.: Наука, 1980.
178. Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае нулевых частот.— ПММ, 1981, 45, № 3, с. 441—449.
179. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике.— М.: Наука, 1978.
180. Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот.— ПММ, 1974, 38, № 5, с. 791—799.
181. Сокольский А. Г. Доказательство устойчивости лагранжевых решений при критическом соотношении масс.— М.: Письма в Астрон. журн., 1978, 4, № 3, с. 148—152.
182. Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка.— ПММ, 1977, 41, № 1, с. 24—32.
183. Иванов А. П., Сокольский А. Г. Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при резонансе второго порядка.— ПММ, 1980, 44, № 5, с. 811—822.
184. Иванов А. П., Сокольский А. Г. Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа.— ПММ, 1980, 44, № 6, с. 963—970.
185. Siegel C. L. Iterations of analytic functions.— Ann. of Math., 1942, 43, № 4.
186. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе.— ДАН СССР, 1953, 93, № 5.
187. Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа.— М.: Гостехиздат, 1952.